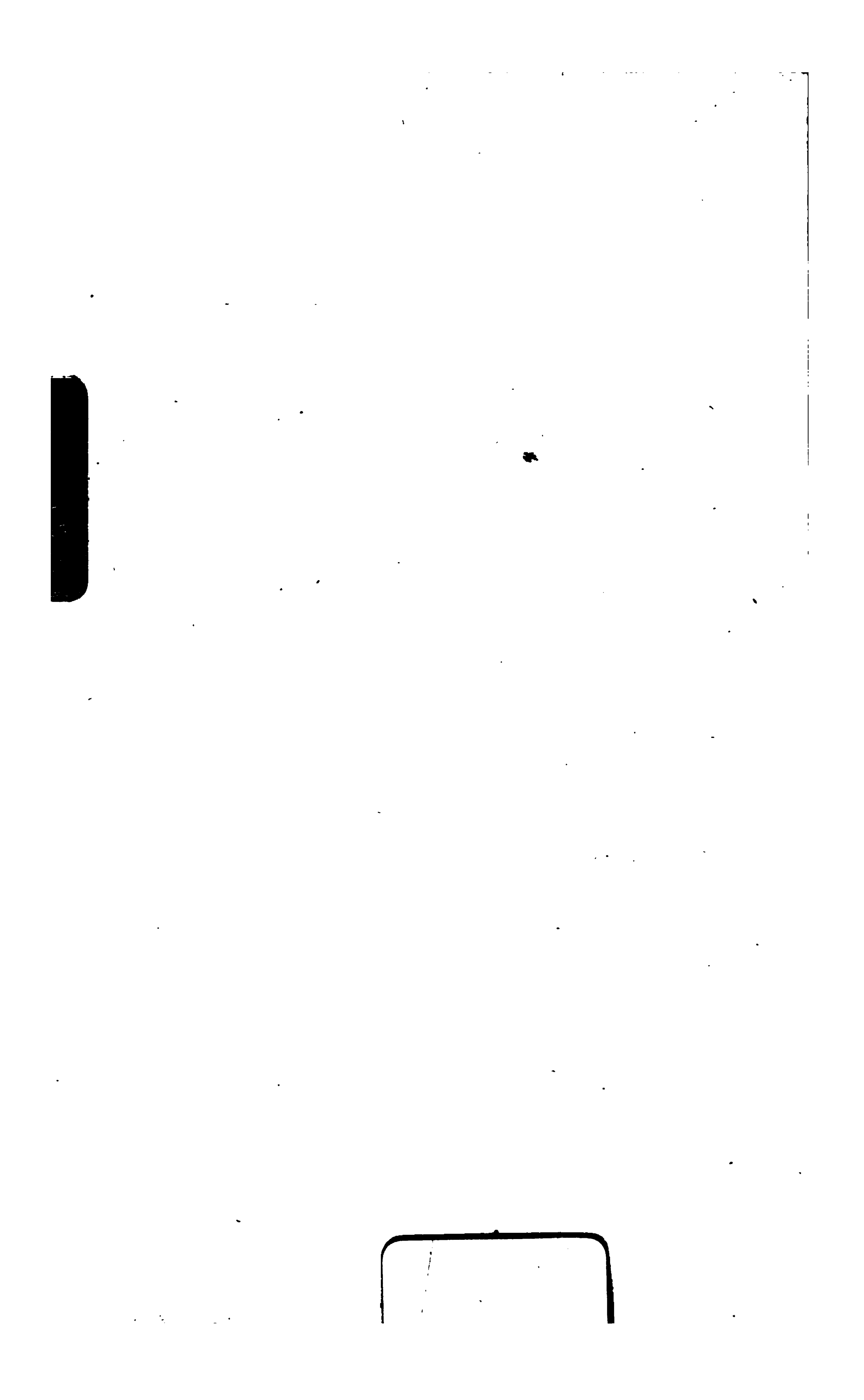




Lehrbuch

der

unbestimmten Analytik

für

höhere Lehranstalten.

Von

W. Berkhan,

Oberlehrer der Mathematik und Naturwissenschaften am Herzoglichen Gymnasio
zu Blankenburg.

Erste Abtheilung.

Die Auflösung der Gleichungen ersten Grades nebst einer Sammlung vollständig aufgelöster Diophantischer Aufgaben.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1855.

Die Auflösung

der

Diophantischen

Gleichungen ersten Grades

für

höhere Lehranstalten.

Von

W. Berkhan,

Oberlehrer der Mathematik und Naturwissenschaften am Herzoglichen Gymnasio zu Blankenburg.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1855.


BIBLIOTHECA·BODLEIANA

Vorrede.

Schon in den ältesten Zeiten finden wir bei den Indern die sichersten Spuren von der Beschäftigung mit unbestimmten Aufgaben, an deren Auflösung sie ihren Scharfsinn übten. Später waren es unter den Griechen Pythagoras, Plato und allermeist Diophantus, welche dieses Feld arithmetischer Speculation cultivirten.

Aber es fehlte noch an einer wissenschaftlichen Grundlage, da noch keine feste allgemeine Zahlentheorie existirte und erst nach der allmäligen Herstellung der schönsten aller mathematischen Doctrinen — dem Lehrgebäude der Algebra — erhielt auch die unbestimmte Analytik oder die Diophantische Kunst das Gepräge einer selbständigen Wissenschaft, zu deren Aufbau vornehmlich Fermat, Bachet de Meziriac, Vieta, Euler, Lagrange, Legendre und Gauss beigetragen haben.

Der neuesten Zeit war es vorbehalten, diesen Theil der Analysis auch auf weitere Kreise auszudehnen, so dass derselbe jetzt vielleicht auf den meisten deutschen Gymnasien, mehr oder weniger umfassend, Gegenstand des Unterrichts geworden ist.

Um so erfreulicher ist es daher dem Verf., auch bei erfahrenen Schulmännern Uebereinstimmung mit seinen Ansichten zu finden, aus didaktischen Gründen diesen Zweig der Analysis früher, als bisher üblich, hervorzuheben und so für denselben mehr und mehr Boden zu gewinnen. Die Erfahrung hat gelehrt, dass selbst noch junge Rechner ein hohes Interesse an unbestimmten Aufgaben finden und das Anziehende der Sache, sobald sie nur die ersten vor-

bereitenden Stufen erreicht haben, deutlich zu erkennen geben. Dieser in der Natur des menschlichen Geistes liegende Umstand giebt dem Lehrer einen Wink, das Feld der Analytik für diesen Zweck mehr zu cultiviren.

Bereits im vorigen Jahre gab einer meiner talentvollsten ehemaligen Schüler eine „Unbestimmte Analytik" heraus; jedoch ist dieses vortreffliche Werk zunächst nur für Mathematiker von Fach geschrieben und dürfte erst später seine reichlichern Früchte tragen.

Bei der verhältnissmässig geringen Anzahl der Beispiele in unsern beliebtesten arithmetisch-algebraischen Exempelbüchern des Meier Hirsch, Salomon und Heis, schien es daher zeitgemäss, das Material eines neuen Lehrbuches, den Schülern der oberen Classen auf Gymnasien und anderen höheren Unterrichtsanstalten, sowie auch den Freunden und Liebhabern der Algebra vorzulegen, welches in Verbindung mit der Zahlentheorie*) eine ebenso edle als kräftige Geistesnahrung zu gewähren vermag.

Die innere Einrichtung dieses Lehrbuches ist so getroffen, dass das Ganze in zwei Abtheilungen zerfällt, deren jede aus mehreren Capiteln besteht. Die erste umfasst die Auflösung der Gleichungen vom ersten, die zweite die vom zweiten Grade, von den einfachsten Formen zu den zusammengesetztern systematisch weiter führend. Dabei richtete ich mein Augenmerk vorzüglich auf eine zweckmässige Auswahl mannichfaltiger Aufgaben zur Uebung, welche am Ende jeder Abtheilung folgen.

Nur ungern entschloss ich mich, mehrere Lehren wegzulassen, um das Buch nicht zu sehr auszudehnen; es blieben z. B. weg die Congruenz der Zahlen, die von Bachet zuerst gegebene Auflösung unbestimmter Gleichungen, sowie auch eine rein arithmetische von Unger; doch konnte es der Verf. sich nicht versagen, neben der Darstellung der ältern Methoden noch ein Paar neue zu geben,

*) Hierüber ist kürzlich ein reichhaltiges, sehr zu empfehlendes Werk erschienen: Elemente der Zahlen-Theorie allgemein fasslich dargestellt von Dr. Herm. Schwarz. Halle, 1855.

deren erste eine Erfindung des Prof. Kunze zu Weimar ist. Ausserdem ist im zweiten Abschnitte überall, wo es die Natur des Gegenstandes zuliess, Anwendung von den Pythagorischen Zahlen gemacht, auf deren Benutzung der Verf. früher hingewiesen hat in seiner bei G. Reichardt zu Eisleben 1853 erschienenen Schrift „Die merkwürdigen Eigenschaften der Pythagorischen Zahlen, ihr Bildungsgesetz und ihr Gebrauch in der unbestimmten Analytik."

Die Lehre von den endlichen Kettenbrüchen ist als bekannt vorausgesetzt, da sie in jedem guten Lehrbuche der Arithmetik vorkommt; nur, was von periodischen Kettenbrüchen nöthig war, ist zur Darstellung gebracht.

Die Benutzung der älteren und neueren Literatur war nothwendig, um einigermassen vollständig zu sein. Die schöne Auflösungsmethode, welche die Combinationslehre gewährt, ist grösstentheils nach Hindenburg, sowie die durch Progressionalbrüche nach Hartmanns trefflichem Lehrbuche der Arithmetik bearbeitet.

Möchte bei dem Streben, Klarheit mit Kürze zu verbinden, diese Schrift zur Beförderung des mathematischen Studiums und der Speculation beitragen und die Brücke schlagen helfen zum Uebergange in die höheren Gefilde unserer Meister!

Blankenburg a/H., im August 1855.

W. Berkhan.

Inhalt des I. Abschnittes.

Erster Abschnitt.

Von der algebraischen Auflösung unbestimmter Gleichungen des ersten Grades.

I. Capitel.

Auflösung unbestimmter Gleichungen mit zwei Unbekannten.

§. 1. **Erklärungen.** Sobald eine Aufgabe mehr unbekannte Grössen enthält, als dieselbe unabhängige Gleichungen darbietet, so heisst sie eine unbestimmte oder Diophantische Aufgabe.

Derjenige Theil der Algebra, welcher sich mit der Auflösung unbestimmter Gleichungen und deren Eigenschaften beschäftigt, pflegt „unbestimmte Analytik“, auch wohl Diophantische Kunst genannt zu werden.

Der älteste Schriftsteller über diesen Gegenstand ist Diophantus von Alexandria (200 J. nach Chr.). Wir kennen seine Werke nach folgenden vier Ausgaben:

1) Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex & de numeris multangulis liber unus. Nach der lateinischen Uebersetzung des Xylander. Basileae 1575. Fol.
2) Graece & latine, auctore Claudio Caspare Bacheto Meziriaco. Lat. Paris 1621. Fol.
3) Graece & latine cum commentariis Bacheti & observationibus. P. de Fermat. Tolosae 1670. Fol.
4) Eine treffliche Uebersetzung besitzen wir von dem Schulrathe Otto Schulz, unter dem Titel: Diophantus arithmetische Aufgaben. Berlin 1822.

§. 2. Man unterscheidet bei unbestimmten Aufgaben den Grad derselben, wie bei den bestimmten, nach Massgabe der Potenzen der einzelnen unbekannten Grössen, oder ihrer Producte in den entsprechenden Gleichungen.

Die Diophantischen Aufgaben können nun in vier verschiedene Abtheilungen gebracht werden, nämlich

A) Es sind zwei unbekannte Grössen vorhanden, zu deren Bestimmung nur eine Gleichung gegeben ist.

B) Es sind in der Aufgabe enthalten				
	drei	Unbekannte	mit 2	Gleichungen
	vier	"	" 3	"
	fünf	"	" 4	"
	.	.	. .	.
	.	.	. .	.
	.	.	. .	.
	n	"	" $n-1$	"

C) Es sind n Unbekannte und zu deren Bestimmung $n-m$ Gleichungen gegeben, wo $m > 1$ ist.

D) Es sind n Unbekannte vorhanden, von denen eine in einer höheren Potenz vorkommt, oder das Product aus 2 oder 3 Unbekannten.

§. 3. Wir beginnen mit dem einfachsten Falle, wo die Aufgabe zwei Unbekannte x, y und nur eine Gleichung enthält. Es treten dabei die zwei Hauptformen auf:

$$ax - by = c \text{ und}$$
$$ax + by = c.$$

Im Allgemeinen verlangt man die Werthe der Unbekannten in positiven ganzen Zahlen, wenn nicht besondere Bedingungen hinzutreten.

Es ist einleuchtend, dass die Anzahl der Auflösungen, d. h. die Bestimmung der Werthe für x und y sehr gross, ja oft unendlich gross ist. Wollte man z. B. zwei Zahlen haben, die zusammen 24 betragen, so würde die Gleichung

$$x + y = 24$$

unendlich viele Auflösungen für x, y geben, wenn auch Brüche gelten sollen. Beschränkt würde aber deren Anzahl sein, wenn man nur ganze Zahlen haben wollte.

Nimmt man $y = 1$, so würde $x = 23$ und es entstehen die beiden Reihen von 12 Gliedern,

für $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ etc.
ist $x = 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17$ etc.

§. 4. Das Verfahren, welches bei der Auflösung einer unbestimmten Gleichung mit zwei Unbekannten anzuwenden ist und welches man die algebraische Reduction zu nennen pflegt, lässt sich auf folgende allgemeine Regel zurückführen:

Man suche aus der Gleichung $ax \mp by = c$ den Werth derjenigen Unbekannten, welche den kleinsten Coefficienten hat. Bei dem in Bruchform erhaltenen Resultate, führe man die Division aus, um die im Zähler enthaltenen Ganzen hervorzuheben; den übrig bleibenden Bruch bezeichne man mit einem neuen Buchstaben als Hülfsgrösse und entwickele aus dieser neuen Gleichung die zweite Unbekannte, ziehe durch Division, wie vorhin, daraus die Ganzen und verfahre mit dem etwaigen Bruche, für welchen man wiederum eine neue Hülfsgrösse einführt, ebenso. Aus der sich ergebenden Gleichung suche man wieder den Werth der ersten Hülfsgrösse und setze dieses Verfahren so lange fort, bis man auf den Ausdruck einer ganzen Zahl gelangt. Endlich stelle man durch gehörige Substitution des Werthes der letzten Hülfsgrösse, rückwärts gehend, den Ausdruck für x und y her, wodurch diese Grössen in ganzen Zahlen leicht bestimmt werden können.

Folgende Aufgaben werden zur Erläuterung dienen.

§. 5. **Aufgabe.** Eine Zahl N zu finden, welche, wenn sie durch 6 dividirt wird, 5 zum Reste giebt, mit 7 dividirt aber 3 übrig lässt.

Auflösung. Nimmt man an, 6 sei in der gesuchten Zahl N, $x$mal enthalten, so ist bei dem Reste 5, diese Zahl

$$N = 6x + 5.$$

Sei wiederum 7 in jener Zahl $y$mal enthalten, so ist bei dem Reste 3 die Zahl N auszudrücken:

$$N = 7y + 3.$$

Nun setze man beide Werthe für N einander gleich, so erhält man die Gleichung:

$$6x + 5 = 7y + 3. \text{ Dann ist:}$$

$$6x = 7y - 2$$

$$x = \frac{7y-2}{6}$$

$$= y + \frac{y-2}{6}.$$

$$\text{Sei } \frac{y-2}{6} = A, \text{ dann ist:}$$

$$y = 6A + 2 \text{ und}$$

$$x = 6A + 2 + A, \text{ oder}$$

$$x = 7A + 2.$$

Die einzelnen Paare von Werthen für x und y sind nun leicht zu bestimmen; denn nimmt man für A nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3 etc. an, so stellen sich die Auflösungen folgendermassen am bequemsten zusammen:

	Für $A =$	0,	1,	2,	3,	4 . . .
ist	$x = 7A + 2 =$	2,	9,	16,	23,	30 . . .
und	$y = 6A + 2 =$	2,	8,	14,	20,	26 . . .
also	$N =$	17,	59,	101,	143,	185 . . .

von welchen Zahlen 17 die kleinste ist, die das Verlangte leistet.

§. 6. **Aufgabe.** Zahlen zu finden, welche durch 10 dividirt 7, durch 8 dividirt 3 zum Reste geben.

Auflösung. Jede Zahl N, welche durch 10 theilbar ist, hat offenbar die Form $10x$, und wenn sie durch 10 getheilt 7 zum Reste lässt, die Form $10x + 7$. Ebenso ist $8y + 3$ der allgemeine Ausdruck für alle die Zahlen, welche durch 8 dividirt 3 zum Reste geben. Weil nun N sowohl $= 10x + 7$, als auch $= 8y + 3$ ist, so erhält man die Gleichung:

$$10x + 7 = 8y + 3, \text{ oder}$$

$$10x + 4 = 8y.$$

Dividirt man beiderseits mit 2, so ist

$$5x + 2 = 4y. \text{ Hieraus folgt:}$$

$$y = \frac{5x + 2}{4} = x + \frac{x + 2}{4}.$$

Man setze $\frac{x + 2}{4} = A$, oder, wie wir in der Folge, der Kürze wegen, immer thun werden:

$$x + 2 = 4A, \text{ dann ist}$$

$$x = 4A - 2.$$

Hiernach wird N, oder $10x + 7$, ausgedrückt durch

$$N = 40A - 13.$$

Wenn also $A = 1, 2, 3 \ldots\ldots$, so ergiebt sich
$N = 27, 67, 107 \ldots\ldots$, welche Zahlen den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten.

§. 7. **Aufgabe.** Welche Zahlen gehen durch 9 auf und lassen durch 14 dividirt 8 zum Reste?

Auflösung. Die gesuchten Zahlen müssen die Form $9x$ und auch $14y+8$ haben. Es ist daher:

$$(1) \qquad 9x = 14y + 8$$

$$\text{folglich } x = \frac{14y+8}{9}$$

$$x = y + \frac{5y+8}{9}.$$

Man setze $5y + 8 = 9A$, so ist

$$y = \frac{9A-8}{5} = A + \frac{4A-8}{5}.$$

Da nun $4A-8$ durch 5 theilbar sein muss, so ist auch das Viertel davon, nämlich $A-2$, dadurch theilbar. Es sei daher $A-2 = 5B$ oder $A = 5B + 2$, dann wird

$$y = \frac{45B+18-8}{5} = \frac{45B+10}{5} \text{ d. i.}$$

$$y = 9B + 2.$$

Diess in (1) gesetzt, giebt für N oder $14y+8$:

$$N = 126B + 36,$$

wodurch die allgemeine Form solcher Zahlen bestimmt ist. Setzt man daher

$B = 0, \; 1, \; 2, \; 3, \; 4$ etc., so erhält man
$N = 36, \; 162, \; 288, \; 414, \; 540$ etc.

§. 8. **Aufgabe.** Ein Kaufmann soll an Zahlungsstatt für 100 fl. zweierlei Tuch, die Elle zu 8 fl. und zu 6 fl. geben. Wie viel Ellen kann er von jeder Sorte nehmen?

Auflösung. Er gebe von der besseren Sorte x Ellen, von der schlechtern y Ellen, so erhält man die Gleichung:

$$8x + 6y = 100.$$

Man dividire durch den gemeinschaftlichen Factor 2, so bekömmt man

$$(1) \quad 4x + 3y = 50.$$

$$\text{Folglich ist (2)} \quad y = \frac{50-4x}{3} = 16 - x + \frac{2-x}{3}\text{*)},$$

$$\text{oder (3)} \quad y = 16 - x - \frac{x-2}{3}.$$

*) Anm. Bekanntlich ist der Ausdruck für y in (2) mit dem in (3) gleichgeltend, da statt

Man setze $x-2 = 3A$, so ist

$$(4) \quad x = 3A + 2.$$

Daraus folgt, durch Substitution dieses Werthes in (3)

$$(5) \quad y = 14 - 4A.$$

Setzt man nun:

$A = 0, 1, 2, 3$, so erhält man
$y = 14, 10, 6, 2$, und also
$x = 2, 5, 8, 11.$

§. 9. **Zusatz.** Bei der vorigen Aufgabe konnte man aus der Gleichung (2) gleich weiter fortschliessen. Da nämlich

$$y = 16 - x + \frac{2-x}{3}, \text{ so sei}$$

$$2 - x = 3B, \text{ also } x = 2 - 3B.$$

Es ist demnach $y = 16 - (2 - 3B) + \frac{2 - (2 - 3B)}{3}$

d. i. $y = 14 + 4B$, und folglich

für $B = 0, 1, 2 \ldots$ ergiebt sich
$y = 14, 18, 22 \ldots$
$x = 2, -1, -4 \ldots$. Setzt man aber
$B = -1, -2, -3 \ldots$, so findet sich
$y = 10, 6, 2 \ldots$
$x = 5, 8, 11 \ldots$

§. 10. Die Auflösung unbestimmter Aufgaben führt meistens auf Brüche von der Form

1) $\frac{ax \mp b}{c}$, oder

2) $\frac{a - bx}{c}$,

welche zugleich mit der unbekannten Grösse x zu einer ganzen Zahl gemacht werden sollen. Ist der Nenner c eine kleine Zahl, so geht die Operation schnell von statten; je grösser aber c ist, desto umständlicher ist das Verfahren, wie folgende Beispiele zeigen.

1) Es soll x und der Bruch $\frac{56x + 11}{39}$ zu einer ganzen Zahl gemacht werden.

$a + \frac{b-y}{c}$, geschrieben werden kann:

$a - \frac{x-b}{c}$. Es ist aber bei der Auflösung der Gleichungen von der Form $ax + by = c$ vortheilhafter, sich der Differenzform zu bedienen, indem man dadurch der Annahme negativer Zahlen entgeht.

Zu diesem Ende setze man:

$$\frac{56x+11}{39} = A \ldots\ldots (1)$$

Dann ist $A = x + \frac{17x+11}{39}$.

Man setze $17x+11 = 39B$, so ist

$$x = \frac{39B-11}{17} = 2B + \frac{5B-11}{17} \ldots. (2).$$

Ferner sei $5B - 11 = 17C$, so ist

$$(3)\quad B = \frac{17C+11}{5} = 3C+2+\frac{2C+1}{5};$$

ferner $2C+1 = 5D$, so wird

$$C = \frac{5D-1}{2} = 2D + \frac{D-1}{2} \ldots\ldots (4)$$

Endlich setze man $D - 1 = 2E$, so folgt

$$D = 2E+1 \ldots. (5)$$

welcher Ausdruck eine ganze Zahl bezeichnet. Durch Zurücksubstitution erhält man nun, den Werth von D in (4) gesetzt:

$$C = 5E + 2.$$

Dieser Werth von C in (3) gesetzt, giebt:

$$B = 17E + 9.$$

Setzt man dieses in (2), so erhält man:

$$x = 39E + 20 \text{ und es ist}$$
$$A = 56E + 29.$$

Nimmt man daher

$E = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots\ldots$ so ist
$x = 20,\ 59,\ 98,\ 137 \ldots\ldots$ und
$A = 29,\ 85,\ 141,\ 197 \ldots\ldots$

§. 11. Der Bruch $\frac{a-bx}{c}$ und x sollen zu einer ganzen Zahl gemacht werden. Hier verfahre man wie im vorigen Falle mit $\frac{ax+b}{c}$, indem man zunächst $a - bx = A$ setzt, daraus $x = \frac{a-A}{b}$ erhält, dann wo möglich die Division ausführt und für den gebliebenen Bruch eine neue Hülfsgrösse einführt u. s. w.

Es sei z. B. $\frac{29-7x}{5} = A$. Dann ist

$$x = \frac{29-5A}{7} = 4 + \frac{1-5A}{7}.$$

Setzt man $1 - 5A = 7B$, so wird

$$5A = 1 - 7B$$ und

$$A = \frac{1 - 7B}{5} = -B + \frac{1 - 2B}{5}.$$ Man setze

$$1 - 2B = 5C,$$ so ist

$$2B = 1 - 5C$$ und

$$B = \frac{1 - 5C}{2} = -2C + \frac{1 - C}{2}$$

Nun sei $1 - C = 2D$, so folgt

$$C = 1 - 2D.$$

Durch Rücksubstitution erhält man

$$B = 5D - 2$$
$$A = 3 - 7D$$
$$x = 2 + 5D.$$

Wenn nun $D = -1,\ 0,\quad 2\ \ldots$
so ist $x = -3,\ 2,\quad 12\ \ldots$
und $A = \quad 10,\ 3,\ -11\ \ldots$

Die Grösse A, so wie x besitzen daher für positive ganze Zahlen nur einen Werth.

Wir wollen nun dasselbe Beispiel noch auf eine andere Weise durchführen. Zu diesem Ende gehen wir von der Form $x = \frac{29 - 5A}{7} = 4 + \frac{1 - 5A}{7}$ zu der gleichgeltenden über:

$$x = 4 - \frac{5A - 1}{7}$$ und setzen

$$5A - 1 = 7B;$$ dann ist

$$A = \frac{7B + 1}{5} = B + \frac{2B + 1}{5}.$$ Setzt man

$$2B + 1 = 5C,$$ so folgt

$$B = \frac{5C - 1}{2} = 2C + \frac{C - 1}{2}.$$

Es sei $C - 1 = 2D$, also

$$C = 2D + 1.$$

Hieraus findet sich nun

$$B = 5D + 2$$
$$A = 7D + 3$$ und
$$x = 2 - 5D.$$

$$\begin{aligned} &\text{Wenn also } D = 0,\quad 1,\quad 2 \ldots\ldots \\ &\text{so ist } x = 2, -3, -8 \ldots\ldots \\ &\text{und } A = 3,\quad 10,\quad 17 \ldots\ldots \end{aligned}$$

wodurch demnach für x und A wieder derselbe Werth gefunden ist. Wenn auch dieses zweite Verfahren nicht immer kürzer ist als das vorige, so besteht der Vortheil desselben darin, dass man zuletzt das Substituiren negativer Zahlenwerthe umgeht.

Doch nicht immer kann eine Grösse wie $\frac{ax + b}{c}$ zugleich mit x zu einer ganzen Zahl gemacht werden, wenn, wie wir später beweisen werden, a und c nicht relative Primzahlen sind. So ist diess z. B. bei dem Ausdrucke $\frac{3x - 1}{15}$ unmöglich, weil 3 und 15 den gemeinschaftlichen Factor 3 haben.

§. 12. Um sich in der Auflösung solcher Aufgaben zu üben, wollen wir noch etliche Beispiele vornehmen und daran einige Bemerkungen knüpfen.

Aufgabe. Ein Schütz erhielt, so oft er das Ziel traf, 10 Ggr.; dagegen musste er, so oft er fehlte, 7 Ggr. bezahlen. Am Ende hatte er 5 Ggr. gewonnen. Wie viele Schüsse hatte er gethan?

Auflösung. Er habe x mal getroffen, so erhält er $10x$ Ggr. Hat er nun y mal gefehlt, so wird er $7y$ Ggr. zu zahlen haben. Es ist also:

$$10x - 7y = 5, \text{ folglich}$$

$$y = \frac{10x - 5}{7} = x + \frac{3x - 5}{7}.$$

Sei $3x - 5 = 7A$, so ist

$$x = \frac{7A + 5}{3} = 2A + 1 + \frac{A+2}{3}.$$

Sei ferner $A + 2 = 3B$; so ist

$$A = 3B - 2.$$

Daraus folgt $x = 7B - 3$ und

$$y = 10B - 5.$$

$$\begin{aligned} &\text{Ist nun } B = 1,\quad 2,\quad 3 \ldots\ldots \\ &\text{so ist } x = 4,\ 11,\ 18 \ldots\ldots \\ &\text{und } y = 5,\ 15,\ 25 \ldots\ldots \end{aligned}$$

Der Schütz kann also 9, oder 26, oder 43 u. s. w. Schüsse gethan haben.

Bei dieser Auflösung konnte man aus der Gleichung $10x - 5 = 7y$ den gemeinschaftlichen Factor 5 absondern, wodurch $y = \frac{(2x-1)5}{7}$ entsteht. Hier lasse man nun den Factor 5 vorläufig ausser Acht, und setze

$$2x - 1 = 7A.$$

Dann ist $x = \frac{7A+1}{2} = 3A + \frac{A+1}{2}$ und, für

$$A + 1 = 2B$$

folgt $A = 2B - 1$, also

$$x = 7B - 3.$$

Für die Bestimmung des Werthes von y hat man natürlich den Factor 5 wieder zu berücksichtigen.

Noch einfacher gestaltet sich die vorige Auflösung, wenn man statt $10x - 5 = 7y$, auf der linken Seite mit 5 dividirt und setzt: $2x - 1 = 7y_1$, woraus folgt:

$$x = \frac{7y_1 + 1}{2} = 3y_1 + \frac{y_1 + 1}{2}.$$

Setzt man $y_1 + 1 = 2A$, so wird

$$y_1 = 2A - 1.$$

Da aber y_1 fünfmal zu klein geworden ist durch die Division des 1sten und 2ten Gliedes, so braucht man diesen Werth von y_1 nur 5 mal grösser zu machen und erhält dadurch $y = 10A - 5$ und dann den zugehörigen Werth von x, nämlich $x = 7A - 3$.

Wir werden später den Vortheil näher betrachten, welchen eine Gleichung von der Form:

$$acx - by = c$$

darbietet.

§. 13. **Aufgabe.** Jemand hat 2 Capitale, das eine zu 3, das andere zu 4 Proc. ausgeliehen; letzteres bringt jährlich 97 Thlr. Zinsen mehr, als ersteres. Wie gross ist jedes Capital?

Auflösung. Das erste Capital sei $= x$, das zweite $= y$, so betragen die 3procentigen Zinsen $\frac{3x}{100}$ und die 4proc. Zinsen von diesem $\frac{4y}{100}$. Es ist also

$$\frac{3x}{100} + 97 = \frac{4y}{100}, \text{ oder}$$

$$3x + 9700 = 4y.$$

Hieraus folgt: $x = \frac{4y - 9700}{3}$

$$= y - 3233 + \frac{y-1}{3}.$$

Es sei $y - 1 = 3A$, so ist

$y = 3A + 1$ und folglich

$$x = 3A + 1 - 3233 + \frac{3A + 1 - 1}{3} \text{ d. i.}$$

$$x = 4A - 3232.$$

Wenn also $A = 808, 809, 810 \ldots.$

so ist $x = 0, 4, 8 \ldots.$

und $y = 2425, 2428, 2431 \ldots.$

§. 14. **Aufgabe.** Durch welche Ziffer muss die Stelle von * in der dekadischen Zahl 6 * 23 ausgefüllt werden, damit dieselbe durch 7 theilbar werde?

Auflösung. Die mit dem Sternchen bezeichnete Stelle sei eine Zahl x. Dann ist offenbar $6x23 = 6023 + x \,.\, 100$; da nun diese Zahl durch 7 theilbar sein soll, so muss sie die Form $7y$ haben. Es ist also

$6023 + 100x = 7y$. Daraus folgt:

$$y = \frac{100x + 6023}{7} = 14x + 860 + \frac{2x+3}{7}.$$

Es sei $2x + 3 = 7A$; so ist

$$x = \frac{7A - 3}{2} = 3A - 1 + \frac{A-1}{2}.$$

Ferner sei $A - 1 = 2B$

so folgt $A = 2B + 1$, daher ist

$x = 7B + 2.$

Nimmt man also

$B = 0, 1, 2 \ldots$

so ist $x = 2, 9, (16) \ldots$

und es sind die beiden nur möglichen Zahlen 6223 und 6923 durch 7 theilbar.

Anmerkung. Addirt man zu 6023 die eingeschlossene Anzahl von Hunderten, nämlich 16, so erhält man

$$\begin{array}{r} 6023 \\ 1600 \\ \hline 7623 \end{array}$$

welche Zahl ebenfalls durch 7 theilbar ist. Dasselbe gilt auch von allen folgenden Werthen für x.

§. 15. **Aufgabe.** Man soll den Bruch $\frac{230}{77}$ in zwei andere Brüche theilen, deren Nenner 7 und 11 sind.

Auflösung. Der Zähler des ersten Bruches sei $= x$, der des zweiten $= y$, so hat man folgende Gleichung:

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{11} = \frac{230}{77}. \text{ Daher ist}$$

$$11x + 7y = 230, \text{ folglich ist:}$$

$$y = \frac{230 - 11x}{7} = 32 - x + \frac{6 - 4x}{7}\text{*)}, \text{ oder}$$

$$y = 32 - x - \frac{4x - 6}{7}.$$

Sei $4x - 6 = 7A$, so ist

$$x = \frac{7A + 6}{4} = A + 1 + \frac{3A + 2}{4}.$$

Man setze $3A + 2 = 4B$, so ist

$$A = \frac{4B + 2}{3} = B + \frac{B - 2}{3}.$$

Sei ferner $B - 2 = 3C$, so folgt
$B = 3C + 2.$

Daher ist $A = 4C + 2$
$x = 7C + 5$ und
$y = 25 - 11C.$

Wenn also $C = 0, 1, 2 \ldots$
so ist $x = 5, 12, 19 \ldots$
und $y = 25, 14, 3 \ldots$

Sonach ist $\frac{5}{7} + \frac{25}{11} = \frac{230}{77}$ u. s. w.

§. 16. **Aufgabe.** In der Chronologie wird gelehrt, dass die sogenannte goldene Zahl eines Jahres gefunden werde, wenn man die Jahreszahl um 1 vermehrt und dann durch 19 theilt, der Rest ist gleich der goldenen Zahl; der sogenannte Sonnencirkel

---

*) Anmerk. Bei der Entwickelung des Werthes für y kann man mit dem Bruche $\frac{6 - 4x}{7}$ wieder etwas kürzer verfahren, da der Zähler den gemeinschaftlichen Factor 2 hat. Man setze nämlich bei

$$y = 32 - x - \frac{2(2x - 3)}{7}$$

$$2x - 3 = 7A.$$

Dadurch kommt man zu $A = 2B - 1$ und erhält $x = 7B - 2$, so wie $y = 6 - 11B$.

3

ist aber derjenige Rest, den die um 9 vermehrte Jahreszahl bei der Division durch 28 übrig lässt. Welches Jahr in diesem Jahrhundert hat nun die goldene Zahl 15 und den Sonnencirkel 18?

Auflösung 1. Die gesuchte Jahreszahl sei $= x$. Nun gebe $x + 1$ dividirt durch 19 den Quotienten y und den Rest 15,

$$\text{so ist } \frac{x+1}{19} = y + \frac{15}{19}, \text{ oder}$$

$$x + 1 = 19y + 15.$$

Es ist also $x = 19y + 14$.

Wenn also $y =$ 95, 96, 97, 98, 99

so ist $x =$ 1819, 1838, 1857, 1876, 1895,

welche Werthe von x alle Jahre dieses Jahrhunderts angeben.

2) Sei das gesuchte Jahr $= z$ und es gebe

$z + 9$ div. durch 28 den Quot. t und den Rest 18,

$$\text{so ist } z + 9 = 28t + 18, \text{ oder}$$

$$z = 28t + 9.$$

Ist also $t =$ 64, 65, 66, 67, 68,

so ist $z =$ 1801, 1829, 1857, 1885, 1913.

Es finden sich daher in diesem Jahrhunderte nur vier verschiedene Jahre, welche der Aufgabe Genüge leisten, indem das 19te Jahrhundert mit 1801 beginnt.

Anmerkung. Hat die gegebene Gleichung die Form $x \mp by = c$, so ist $x = \pm by + c$. Es hat also der Ausdruck für x schon die Form einer ganzen Zahl und bedarf deshalb keiner weiteren Hülfsgrösse, so dass für y sogleich ganze Zahlen angenommen werden können.

§. 17. **Aufgabe.** Ein Landwirth will ein rectanguläres Feld mit Bäumen bepflanzen, von denen er fast 300 Stück hat. Setzt er in jede Reihe 25 Stück, so bleiben ihm 19 Stück übrig; pflanzt er aber in jede Reihe 30 Stück, so fehlen ihm noch 6 Stück, um die letzte Reihe vollständig zu machen; wie viele Bäume hat er?

Auflösung. Er habe x Reihen à 25 Stück gepflanzt, so hat er 19 übrig. Daher ist die Anzahl der Bäume $= 25x + 19$. Setzt er aber y Reihen à 30 Bäume, so fehlen ihm 6 Stück. Er hat also $30y - 6$ Bäume; daher ist

$$25x + 19 = 30y - 6, \text{ oder reducirt:}$$

$$5x = 6y - 5, \text{ folglich}$$

$$x = \frac{6y - 5}{5} = y - 1 + \frac{y}{5}.$$

Man setze $y = 5A$, so wird

$$x = 6A - 1.$$

Ist nun	$A =$	1,	2,	3	....
so ist	$x =$	5,	11,	17	....
und $25x + 19$	$=$	144,	294,	(444)	....

Es können demnach nur 144 oder 294 Bäume gewesen sein.

Anmerkung. Die hier aufzulösende Gleichung $5x - 6y = -5$ geht durch Division des 1sten und 3ten Gliedes mit 5 über in folgende: $x - 6y_1 = -1$, woraus sogleich sich ergiebt:

$$x = 6y_1 - 1.$$

Es erscheint hier nämlich der Werth von x in der Form einer ganzen Zahl, so dass für y_1 alle Zahlen von 1 an gesetzt werden können; denn obgleich y_1 einen 5 mal zu grossen Werth besitzt, so ist es doch überflüssig eine andere Hülfsgrösse A einzuführen, da y_1 deren Stelle vertritt.

§. 18. Die einfachste Form einer unbestimmten Gleichung ist $ax - by = 0$. Soll dieselbe aufgelöst werden, so ist einleuchtend, dass wenn für x der Werth b und für y der Werth a gesetzt wird, diese der Gleichung Genüge leisten, indem $ab - ba = 0$ ist. Setzt man für x und y beliebige Vielfache von diesen Werthen, so leisten sie dasselbe, da wiederum $a \,.\, mb - b \,.\, am = 0$ ist.

Man kann daher bei dieser Gleichung die allgemeinen Werthe für x und y ausdrücken durch

$$x = am$$
$$y = bm.$$

Wäre z. B. $9x - 13y = 0$, so erhält man sogleich $x = 13m$ und $y = 9m$, wo für m jede beliebige ganze Zahl gesetzt werden kann.

Diese allgemeinen Werthe ergeben sich übrigens auch auf folgende Weise. Es ist nämlich

$$x = \frac{by}{a}.$$

Man setze nun $\frac{y}{a} = m$, so ist $y = am$,

folglich ist $x = \frac{b \,.\, am}{a} = bm.$

§. 19. Wenn wir die verschiedenen Werthe von jeder der Unbekannten bei irgend einer der vorigen Aufgaben betrachten, so werden wir finden, dass dieselben eine arithmetische Progression bilden, deren Differenz oder Exponent nichts anderes als der Coefficient der anderen Unbekannten ist. So waren in der 1. Aufgabe (§. 5.) die Werthe von x aus der Gleichung

$$6x - 7y = -2$$

$x = 2,\ 9,\ 16,\ 23,$ etc. und jene von y:

$y = 2,\ 8,\ 14,\ 20,$ etc.

In der ersten Reihe steigen alle folgenden Glieder um 7 d. i. um den Coefficienten von y, und in der zweiten Reihe steigen die Glieder um 6, d. i. um den Coefficienten der anderen Unbekannten x.

Bei der Aufgabe 4. (§. 8.) ergaben sich aus der Gleichung

$$4x + 3y = 50$$

folgende Werthe der beiden Unbekannten:

$x = 2,\ 5,\ 8,\ 11\ \ldots\ldots$ und

$y = 14,\ 10,\ 6,\ 2\ \ldots\ldots$

Hier ist die Reihe der x-Werthe eine um den Coefficienten (3) von y steigende arithmetische Progression, während zugleich die Reihe der y-Werthe eine um den Coefficienten (4) von x fallende Progression darstellt.

Dieser Umstand ist aber kein blosser Zufall, sondern tritt als ein Gesetz hervor, welches wir auf mehr als eine Art beweisen können.

Aber noch ein anderer Umstand verdient beachtet zu werden. Es hängt nämlich die Möglichkeit der Auflösung einer Gleichung mit zwei Unbekannten, deren allgemeine Form

$$ax \mp by = c$$

ist, von dem Verhältnisse der Coefficienten a und b ab, so wie auch von dem + oder — Zeichen die Anzahl der geltenden Werthe für die Unbekannten.

§. 20. **Lehrsatz.** Haben bei der allgemeinen Gleichung

$$ax \mp by = c$$

die Coefficienten a und b einen gemeinschaftlichen, nicht in c enthaltenen, Factor, so ist die Auflösung in ganzen Zahlen unmöglich.

Beweis. Denn es sei m dieser gemeinschaftliche Factor und $a = m\alpha$, sowie $b = m\beta$; dann ist

$$\alpha mx \mp \beta my = c, \text{ folglich}$$

$$\alpha x \mp \beta y = \frac{c}{m}.$$

Da nun α und β ganze Zahlen sind, so können x und y es nicht zugleich sein, weil sonst $\alpha x \mp \beta y$ einer ganzen Zahl = wäre, da diese Summe (oder Differenz) doch dem Bruche $\frac{c}{m}$ gleich sein muss, welches unzulässig ist. Demnach müssen die Coefficienten a und b nothwendig relative Primzahlen sein.

§. 21. **Lehrsatz.** Sind a, b, x, y ganze Zahlen und führt eine Aufgabe auf eine Gleichung von der Form

$$ax \mp by = c,$$

so giebt es nur eine beschränkte Anzahl von Auflösungen, wenn das untere Zeichen (+) gebraucht wird, aber unendlich viele, wenn das obere Zeichen (—) gilt.

Beweis. 1) Wenn $ax + by = c$

so ist $ax = c - by$.

Folglich liegt y zwischen zwei Grenzen; es muss nämlich $by < c$ und höchstens $by = c$ sein, also ist

$$y < \frac{c}{b}, \text{ oder höchstens } y = \frac{c}{b}.$$

Demnach liegt y zwischen den Grenzen

$$0 \text{ und } \frac{c}{b}.$$

Da aber zwischen diesen Grenzwerthen durchaus nur eine bestimmte endliche Anzahl ganzer Zahlen liegt, so kann es für y und daher auch für x nur eine beschränkte Anzahl von Werthen gehen.

Nimmt man an, es wäre in dieser Gleichung $c < b$, also $\frac{c}{b}$ ein ächter Bruch, so wäre keine Auflösung möglich, weil zwischen 0 und einem ächten Bruche keine ganze Zahl liegt.

2) Ist dagegen die gegebene Gleichung

$ax - by = c$, so folgt

$ax = c + by$, und es ist einleuchtend, dass zwar auch jetzt $y = 0$ der kleinste zulässige Werth von y ist, dass es aber bis in's Unendliche wachsen kann, ohne dass $c + by$, oder die ihr gleiche Grösse ax negativ würde.

Es sind also die Grenzen, zwischen welchen y und mithin x liegt: 0 und ∞.

§. 22. **Lehrsatz.** Gestattet eine einfache unbestimmte Gleichung mehrere ganzzahlige Werthe für die unbekannten Grössen x und y, so bilden die Werthe von x eine arithmetische Progression, deren Differenz der Coefficient von y und die Werthe von y eine Progression, deren Differenz der Coefficient von x ist; auch sind die allgemeinen Auflösungsformeln für die Gleichung

$$ax - by = c:$$
$$x = w + nb$$
$$y = v + na,$$ so wie für die Gleichung
$$ax + by = c:$$
$$x = w - nb$$
$$y = v + na.$$

Beweis. I. Es sei $ax - by = c$ und man habe einen Werth für $x = w$, für $y = v$ gefunden, so sind

$w + b$, $w + 2b$, $w + 3b$ etc., so wie

$v + a$, $v + 2a$, $v + 3a$ etc. ebenfalls Werthe, welche, für x und y in die Gleichung substituirt, derselben Genüge leisten, so dass zunächst

$$a(w + b) - b(v + a) = c \text{ sein muss.}$$

Die Auflösung der Klammern giebt auch

$$aw + ab - bv - ab = c, \text{ indem}$$
$$ax = aw \text{ und } by = bw \text{ ist.}$$

Dasselbe gilt von allen anderen Gliedern und man kann die ursprüngliche Gleichung in folgender Gestalt vorstellen:

$$a\left\{\begin{array}{l} w \\ w + b \\ w + 2b \\ w + 3b \\ w + 4b \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w + nb \end{array}\right\} - b\left\{\begin{array}{l} v \\ v + a \\ v + 2a \\ v + 3a \\ v + 4a \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v + na \end{array}\right\} = c$$

wobei $x = w + nb$ und $y = v + na$ die allgemeinen Auflösungsformeln bezeichnen.

II. Es sei $ax + by = c$ und wie vorhin

$x = w$, sowie $y = v$ irgend ein Werth in ganzen Zahlen, dann leisten auch die Werthe

$w-b$, $w-2b$, $w-3b$ etc., sowie
$v+a$, $v+2a$, $v+3a$ etc. für x und y in die Gleichung substituirt, derselben Genüge.

Denn auch hier ist:

$$a(w-b)+b(v+a) = aw-ab+bv+ab = c.$$

Dasselbe gilt von jedem andern beliebigen Paare von Gliedern der Progressionen und man kann allgemein die Gleichung

$$ax+by = c$$

unter folgender Form darstellen:

$$a\left\{\begin{matrix} w \\ w-b \\ w-2b \\ w-3b \\ w-4b \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w-nb \end{matrix}\right. + b\left\{\begin{matrix} v \\ v+a \\ v+2a \\ v+3a \\ v+4a \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v+na \end{matrix}\right. = c$$

wo $x = w-nb$ und $y = v+na$ wieder die allgemeinen Werthe bezeichnen. Die Richtigkeit dieser Formen ergiebt sich sogleich durch deren Substitution in die gegebene Gleichung. Es ist nämlich:

$$a(w-nb)+b(v+na) = aw-nab+bv+nab =$$
$$aw+bv = c, \text{ oder was einerlei ist:}$$
$$ax+by = c.$$

Es kann aber auch, vorausgesetzt, dass $x = \alpha$ und $y=\beta$ irgend ein Paar der Gleichung Genüge leistende Werthe sind, die Reihe der x-Werthe eine steigende und die der y-Werthe eine fallende sein (wie diess auch sehr oft bei Zahlengleichungen der Fall ist). Man setze daher:

$$a\left\{\begin{matrix} \alpha \\ \alpha+b \\ \alpha+2b \\ \alpha+3b \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha+nb \end{matrix}\right. + b\left\{\begin{matrix} \beta \\ \beta-a \\ \beta-2a \\ \beta-3a \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta-na \end{matrix}\right. = c$$

so ist auch hier wiederum

$$a(\alpha+nb)+b(\beta-na) = a\alpha+anb+b\beta-bna.$$
d. i. $a\alpha+b\beta = c.$

Beweis 2. Gesetzt man habe für x und y die beiden besonderen Werthe x^1 und y^1 gefunden, welche der Gleichung $ax + by = c$ Genüge leisten, dann ist

$$ax^1 + by^1 = c \quad (1)$$

Nun seien $x^1 + p$ und $y^1 + q$ zwei andere besondere Zahlenwerthe für x und y, so dass demnach

$$a(x^1 + p) + b(y^1 + q) = c \quad (2).$$

Es fragt sich nun, in welcher Beziehung p und q zu einander stehen?

Subtrahirt man die Gleichung (1) von (2), Glied für Glied, so erhält man:

$$ap + bq = 0, \text{ oder}$$
$$ap = -bq \text{ und}$$
$$p = -\frac{bq}{a} \quad (3).$$

Eingedenk, dass b und a prim zu einander sind (20), wird p nur dann eine ganze Zahl werden können, sobald q ein Vielfaches von a ist, wo dann auch q eine ganze Zahl sein muss.

Sei sofort $q = na$, wo n alle ganzen Zahlen, sowohl positive als negative darstellt, so giebt uns die Gleichung (3) folgenden Ausdruck:

$$p = -nb.$$

Sind daher x^1 und y^1 irgend zwei Werthe von x und y, so können alle übrigen dargestellt werden durch

$$x = x^1 - nb$$
$$y = y^1 + na$$

insofern n alle ganzen Zahlenwerthe auszudrücken vermag. Ist also n negativ, so wird

$$x = x^1 + nb \text{ und}$$
$$y = y^1 - na.$$

Hat endlich die gegebene Gleichung die Form

$$ax - by = c,$$

so ergiebt sich unter denselben Voraussetzungen

$$ap = bq, \text{ oder}$$
$$p = \frac{bq}{a}, \text{ so dass, für } q = na$$
$$p = nb \text{ wird.}$$

Die allgemeinen Werthe für diesen Fall sind demnach $x = x^1 + nb$ und $y = y^1 + na$.

2*

Beweis 3. I. Leisten $x = \alpha$ und $y = \beta$ der Gleichung

$$ax - by = c \quad (1)$$

Genüge, so ist auch

$$a\alpha - b\beta = c \quad (2).$$

Folglich, wenn man (2) von (1) subtrahirt, so erhält man

$$a(x - \alpha) - b(y - b) = 0.$$

Daher ist $x - \alpha = \frac{b(y - \beta}{a}$ und mithin

$$x = \alpha + \frac{b(y - \beta)}{a} \quad (3).$$

Um nun x zu einer ganzen Zahl zu machen, setze man

$$y - \beta = na.$$

Dann wird $y = \beta + na$, also auch

$$x = \alpha + nb \text{ nach } (3).$$

II. Unter der obigen Voraussetzung hat man für die Gleichung

$$ax + by = c$$

$$a\alpha + b\beta = c, \text{ folglich}$$

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0, \text{ oder}$$

$$a(x - \alpha) = b(\beta - y) \text{ also}$$

$$x - \alpha = \frac{b(\beta - y)}{a}.$$

Damit x eine ganze Zahl werde, setze man

$$\beta - y = na$$

so ist $y = \beta - na$ und mithin

$$x = \alpha + nb.$$

§. 23. **Zusatz.** Ist in der ersten Gleichung $ax - by = c$ das dritte Glied c eine negative Zahl, so ändert diess die allgemeinen Werthe nicht.

Zu grösserer Deutlichkeit sind hier die beiden Hauptformen der unbest. Gleichungen einzeln betrachtet; man kann aber, von der Form $ax + by = c$ ausgehend, dieselben Folgerungen machen, wenn man a oder b negativ annimmt. Die für x und y aus solcher Gleichung hervorgehenden Reihen können natürlich, wie auf der rechten Seite, so auch auf der linken in's Unendliche fortgesetzt werden. Das Wichtigste bleibt dann nur, zwei solcher Werthe, welche der Gleichung genügen, mit Schnelligkeit aufzufinden.

§. 24. **Zusatz 2.** Der vorige Lehrsatz bleibt auch gültig, wenn α und β Werthe von x und y in Brüchen sind, obgleich

die Bedingung, dass x, y positive ganze Zahlen sein sollen, die vorherrschende ist. Denn nimmt in der Gleichung

$$ax - by = c$$

die Grösse x um irgend ein Inkrement Δx zu, so muss auch, wenn Gleichheit bestehen soll, y um ein entsprechendes Δy zunehmen. Ist also

$$a(x + \Delta x) - b(y + \Delta y) = c, \text{ so giebt}$$
$$ax - by = c \text{ davon subtrahirt}$$
$$a\Delta x - b\Delta y = 0, \text{ oder}$$
$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{b}{a}.$$

Es verhalten sich also die Inkremente der Unbekannten zu einander umgekehrt, wie ihre Coefficienten. Wäre also z. B. $\Delta x = b$, so würde auch $\Delta y = a$ sein; wäre dagegen $\Delta x = \frac{m}{n}x$, so würde nothwendig $\Delta y = \frac{am}{bn}x$ sein müssen, weil

$$b : a = \frac{m}{n}x : \Delta y \text{ ist, und man hat}$$

$$a\left(x + \frac{m}{n}x\right) - b\left(y + \frac{am}{bn}x\right) =$$
$$ax + \frac{am}{n}x - by - \frac{amx}{n} = c.$$

Leisten demnach $x = \frac{m}{n}$ und $y = \frac{p}{q}$ der Gleichung Genüge, so thun es auch

$$x = \frac{m}{n} + b \text{ und } y = \frac{p}{q} + a, \text{ weil nach der Vor.}$$
$$a \cdot \frac{m}{n} - b \cdot \frac{p}{q} = c, \text{ und}$$
$$a\left(\frac{m}{n} + b\right) - b\left(\frac{p}{q} + a\right), \text{ oder}$$
$$\frac{am}{n} + ab - \frac{bp}{q} - ab = \frac{am}{n} - \frac{bp}{q} = c \text{ ist.}$$

Gewähren also irgend zwei zusammengehörige Werthe $x = \frac{m}{n}$, $y = \frac{p}{q}$ eine Auflösung der vorgelegten Gleichung, so bieten die successiven Glieder der arithmetischen Reihen

$$\frac{m}{n},\ \frac{m}{n}+b,\ \frac{m}{n}+2b\ \ldots\ldots\ \text{etc.}$$
$$\frac{p}{q},\ \frac{p}{q}+a,\ \frac{p}{q}+2a\ \ldots\ldots\ \text{etc.}$$

eben so viele andere dar, indem die Substitution von $\frac{m}{n}+rb$ für x und $\frac{p}{q}+ra$ für y in die Gleichung, das Verlangte leistet.

§. 26. Unter den verschiedenen Aufgaben, welche auf eine Gleichung von der Form $ax - by = c$ führen, ist diejenige von besonderem Interesse, wo man Zahlen verlangt, welche durch zwei gegebene dividirt, bestimmte Reste lassen, — wie wir bereits eine solche im §. 5. betrachtet haben. Diese Aufgabe kann auch auf drei und beliebig viele Divisoren ausgedehnt werden, wobei sich nach Massgabe der Data manche Gesetze offenbaren, durch deren Anwendung die besondere Auflösung einer Gleichung überflüssig wird.

§. 27. **Der Lehrsatz von M. Stifel** *). Verlangt man eine Zahl, welche durch zwei um Eins verschiedene Divisoren getheilt, bestimmte Reste übrig lässt, so multiplicire man den Rest des kleineren Divisors mit dem grösseren Divisor, sowie den Rest des grösseren Divisors mit dem Quadrate des kleineren und dividire beider Producte Summe durch das Product beider Divisoren: so giebt der Rest die gesuchte Zahl.

Beweis. Es sei N die gesuchte Zahl. Giebt nun

N mit a dividirt den Rest R und
N mit $a+1$ „ „ „ r, so ist

$N = (a+1)R + a^2r$ ein Ausdruck, welcher diesen Bedingungen Genüge leistet; denn dividirt man denselben mit a, so erhält man offenbar R zum Reste. Dividirt man ferner mit $a+1$, so erhält man

$$a+1]\ (a+1)R + a^2r\ \ [R + ar - r$$
$$\underline{a^2r + ar}$$
$$-ar$$
$$\underline{-ar - r}$$
$$\text{Rest } +r.$$

*) Michael Stifel (von Esslingen, woselbst er Prediger war) Arithmetica integra. Nürnberg 1544. 4. Mit einer Vorrede von Philipp Melanchthon.
Vergl. v. Clausberg, Demonstrative Rechenkunst. 2te Aufl. Leipzig 1748. §. 1491.

Sonach leistet der Ausdruck $(a+1)R+a^2r$ schon das Verlangte. Man wird aber durch Division desselben mit dem Producte der Divisoren $a(a+1)$ in dem bleibenden Reste eine noch kleinere derartige Zahl N erhalten, wie folgende Division ergiebt:

$$a^2+a\,]\,a^2r+(a+1)R\,[\,r$$
$$\underline{a^2r+ar}$$
$$\text{Rest} = (a+1)R-ar.$$

Dieser Rest giebt, durch a dividirt, wieder einen Rest $=R$, und durch $a+1$ getheilt, den Rest r; denn es ist

$$a+1\,]\,(a+1)R-ar\,[\,R-r$$
$$\underline{-ar-r}$$
$$+r,$$

womit dieser Satz bewiesen ist.

§. 28. **Zusatz** 1. Der vorige Lehrsatz giebt eine einfache Regel zur Auflösung einer Classe von Aufgaben, welche unter der Gleichung

$$ax+R = (a+1)y+r, \text{ oder}$$
$$ax-(a+1)y = r-R \text{ begriffen sind.}$$

1. **Beispiel.** Welche Zahl giebt mit 5 dividirt den Rest 3 und mit 6 dividirt den Rest 4?

Hier ist $6.3+5^2.4 = 18+100 = 118$. Diese Zahl dividirt mit 5.6 oder 30 giebt den Rest 28, welche Zahl der Aufgabe Genüge leistet.

2. **Beispiel.** Welche Zahl giebt mit 5 dividirt 4 und mit 6 dividirt 3 zum Reste?

Man findet diese $= 9$.

3. **Beispiel.** Welche Zahl giebt mit 36 dividirt den Rest 0 und mit 37 den Rest 1?

Antw. 1296.

§. 29. **Zusatz** 2. Ist $R=r$, also $R-r=0$, so ist

$$N = (a+1)R-ar = R.$$

Z. B. Welche Zahl giebt durch 6 dividirt den Rest 5 und durch 7 dividirt ebenfalls 5?

Hier ist nun der Rest 5 selbst die kleinste positive ganze Zahl N; dann leisten 47, 85 . . u. s. w. dasselbe.

§. 30. **Zusatz** 3. Ist $R=0$ und $r=1$, so wird

$$N = (a+1)R-ar = -a.$$

Z. B. Welche Zahl giebt durch 6 dividirt den Rest 0 und durch 7 dividirt den Rest 1?

Hier ist -6 eine solche Zahl N; denn

$$\begin{array}{lll} 6]-6[-1 & \text{und} & 7]-6[-1 \\ \underline{-6} & & \underline{-7} \\ \text{Rest } 0 & & \text{Rest } +1 \end{array}$$

Andere Zahlen von dieser Beschaffenheit sind: 36, 78 . . etc.

Man kann hier auch folgenden Lehrsatz aufstellen: **Sind zwei Divisoren um 1 verschieden und giebt eine Zahl N durch jene dividirt resp. die Reste 0 und 1, so giebt das Quadrat vom Divisor ohne Rest eine solche Zahl N, und zwar die kleinste positive.**

Es seien a und $a+1$ die beiden Divisoren und N gebe durch a getheilt den Rest 0, durch $a+1$ getheilt den Rest 1; dann ist a^2 eine solche Zahl. Denn dividirt man wirklich mit $a+1$ in a^2 so erhält man:

$$\begin{array}{l} a+1]\ a^2\ [a-1 \\ \quad\ \ \underline{a^2+a} \\ \qquad\ -a \\ \qquad\ \underline{-a-1} \\ \qquad\quad +1. \end{array}$$

§. 31. **Zusatz** 4. Giebt $N:a$ den Rest R und $N:a+1$ „ „ r, so bilden die Werthe von N eine arithmetische Progression, deren Differenz $= a(a+1)$, also das Product beider Divisoren ist. Es giebt nämlich der Ausdruck $N=(a+1)R-ar$, um $a(a+1)$, oder a^2+a vermehrt, oder vermindert, allemal durch a dividirt, den Rest R, und durch $a+1$ dividirt, den Rest r; denn es ist:

$$[aR+R-ar+a(a+1)] : a = R-r+a+1+\frac{R}{a}, \text{ sowie}$$

$$\begin{array}{l} a+1]\ aR+R-ar+a^2+a\ [R+a-r \\ \qquad\ \ \underline{aR+R} \\ \qquad\qquad\ a^2+a-ar \\ \qquad\qquad\ \underline{a^2+a} \\ \qquad\qquad\qquad -ar \\ \qquad\qquad\qquad \underline{-ar-r} \\ \qquad\qquad\qquad \text{Rest } +r. \end{array}$$

§. 32. **Zusatz** 5. Es ist aber auch $(a+1)R-ar$ die möglich kleinste positive Zahl, welche das Verlangte leistet; denn da $(a+1)R+a^2r$ durch das Product der beiden Divisoren $a(a+1)$ getheilt, den Rest $(a+1)R-ar$

giebt, so ist derselbe kleiner als der Divisor $a(a+1)$, oder a^2+a. Es ist aber $a(a+1)$ die Differenz, nach welcher die Reihe der Werthe von N fortschreitet (Zus. 4.). Daraus folgt, dass es keine kleinere positive Zahl N gebe, als dieser Rest, welche den Bedingungen Genüge leistet.

Dasselbe ergiebt sich daraus, dass jener Rest $(a+1)R-ar$ um die Differenz $a(a+1)$ vermindert, nothwendig negativ ausfällt; denn da

$a > R$, so ist auch
$a(a+1) > (a+1)R$, folglich
$(a+1)R-a(a+1)$ negativ, und um so mehr muss
$(a+1)R-ar-a(a+1)$ eine noch grössere negative Zahl sein. Dieser Ausdruck, sowie jedes andere Glied in der Reihe der Werthe von N leistet selbstverständlich den Bedingungen der Aufgabe Genüge.

§. 33. **Zusatz** 6. Da $(a+1)R-ar$ die kleinste Zahl N ist, welche der Aufgabe Genüge leistet, so folgt, dass nach der ihr entsprechenden Gleichung

$$ax+R = (a+1)y+r$$

nothwendig $ax+R = (a+1)R-ar$ sein muss.

Hieraus folgt $x = R-r$. Daher ist

$$N = ax+r = a(R-r)+R.$$

Nun nehmen die Werthe von x nach der im §. 22. bewiesenen Eigenschaft der Gleichung von der Form $ax-by=c$ um den Coefficienten von y zu, d. i. hier um $a+1$; man erhält daher folgende Werthe:

$$R-r;\ R-r+a+1;\ R-r+2(a+1)\ \ldots.\ \text{etc.}$$

folglich sind die entsprechenden $ax+R$, oder N-Werthe:

$$a(R-r)+R;\ a[R-r+a+1]+R;\ a[R-r+2(a-1)]+R\ \ldots.\ \text{etc.}$$

Hiernach lässt sich Stifel's Regel noch kürzer folgendergestalt aussprechen:

„Man multiplicire den Unterschied der gebliebenen Reste mit dem kleinern Divisor und addire dazu dessen Rest."

§. 34. **Zusatz** 7. Bei der Anwendung dieser Vorschrift darf man nicht vergessen, dass die Differenz der Reste, oder $R-r$ oft negativ ist und dann auch eine negative Zahl N gefunden wird. In diesem Falle würde man nur das Product der Divisoren zuzusetzen haben.

Es gebe z. B. $N : 5$ den Rest 2
$N : 6$ „ „ 3.

Dann ist $R - r = -1$ und $(R - r) - a = -5$, also $(R - r)a + R = -5 + 2 = -3$. Hierzu das Product $a(a + 1)$ d. i. 30 addirt, giebt $N = 27$ als die kleinste positive Zahl.

§. 35. **Zusatz** 8. Bleibt bei dem kleineren Divisor der Rest Null, so kann man dafür auch den Divisor selbst setzen. z. B.

Divisor	Rest
5	0 oder 5
6	2.

Hier ist nun $R - r = 3$ und also $N = 3 . 5 + 5 = 20$, wofür der Grund leicht zu finden ist.

Es gebe $N : a$ den Rest 0 oder a und
$N : (a + 1)$ den Rest 1; so ist nach der Formel
$N = (a + 1)R - ar$,
weil $R = a$ und $r = 1$, $N = (a + 1)a - a = a^2$.

Ebenso nach Zus. 6. $N = (a - 1)a + a = a^2$.

Sind beide Reste $= 0$, so wird aus
$N = (a + 1)R - ar$, da $R = a$ und $r = a + 1$ gesetzt werden kann, dasselbe Resultat hervorgehen, nämlich
$(a + 1)a - a(a + 1) = 0$. In diesem Falle ist also die kleinste Zahl $N = 0$ und die nächst höhere $N = a(a + 1)$ d. i. das Product der beiden Divisoren.

§. 36. **Zusatz** 9. Sind endlich beide Reste um 1 kleiner als die Divisoren, so erhält man für N ebenfalls einen einfacheren Ausdruck.

Es gebe $N : a$ den Rest $a - 1$ und
$N : (a+1)$ „ „ a.

Dann ist $N = (a+1)R - ar = (a+1)(a-1) - a^2 = -1$, folglich das nächste höhere $N = a(a+1) - 1$.

§. 37. **Lehrsatz.** Wenn eine Zahl N so beschaffen ist, dass sie, durch mehrere andere a, b, c etc. dividirt, denselben Rest n übrig lässt, so bilden die Werthe von N für a und b die Progression: $ab + n$; $2ab + n$; $3ab + n$ . . . etc., für drei Divisoren aber die Reihe:

$abc + n$; $2abc + n$; $3abc + n$ . . . . etc.

Beweis. Da n sowohl durch a, als durch b dividirt zum Quotienten 0 giebt und n zum Reste lässt, so ist offenbar n selbst

die kleinste der gesuchten Zahlen. Um nun andere Zahlen zu erhalten, braucht man nur zu diesem Reste das Product der Divisoren (oder deren kleinsten Dividuus) zu addiren. Denn es giebt offenbar für die beiden Divisoren a und b der Ausdruck $ab + n$ einerlei Rest $= n$. Ebenso ist für drei Divisoren a, b, c : $abc + n$ eine solche Zahl vom Reste n u. s. w. Alle solchen Zahlen stehen daher in der Progression:

$$abc + n;\ 2abc + n;\ 3abc + n\ \ldots\ldots$$

Dasselbe gilt von jeder anderen Anzahl Divisoren. z. B.

Durch 3 div. Rest 1
„ 4 „ „ 1
„ 5 „ „ 1, giebt

$N = 1;\ 61;\ 121;\ 181$, etc.

Ferner: Durch 2 geth. Rest 1
„ 3 „ „ 1
„ 4 „ „ 1.

Da aber für 2, 3, 4 der kleinste Dividuus $= 12$, so ist die Reihe:

$$1;\ 13;\ 25;\ 37;\ \ldots\ldots$$

§. 38. **Zusatz.** Für 2 Divisoren a und b, welche beide den Rest n geben, lässt sich der Ausdruck für N auch aus der Gleichung $ax + n = by + n$ sogleich ableiten. Denn diese giebt $x = \frac{b}{a} y$. Damit nun x eine ganze Zahl werde. setze man $y = a$; $2a\ \ldots$, dann erhält man $x = b$, oder $x = 2b$ etc., folglich

$$ax + n \text{ oder } N = ab + n, \text{ oder } 2ab + n \text{ etc.}$$

z. B. Divisor	Rest
5	3
7	3

Hier ist $N = 5 \cdot 7 + 3 = 38$ u. s. w.

§. 39. **Lehrsatz.** Giebt eine Zahl
N durch a getheilt den Rest $a - 1$
und „ „ b „ „ „ $b - 1$,
so ist $N = ab - 1$.

Beweis. Eine Zahl N, welche die erste Bedingung erfüllt, hat die Form $ax + a - 1$ und, wenn sie die zweite Bedingung erfüllt, zugleich die Form $by + b - 1$. Hieraus folgt

$$ax + a = by + b, \text{ oder}$$
$$a(x + 1) = b(y + 1); \text{ daher}$$
$$x + 1 = \frac{b}{a}(y + 1).$$

Setzt man $y+1=a$, so ist $x=b-1$.

Demnach ist $N=ax+a-1=ab-1$.

Beweis 2. Die Behauptung rechtfertigt sich sogleich durch wirkliche Division. Dividirt man $ab-1$ durch a, so kann der Quotient nicht b, sondern nur $b-1$ sein, und man erhält zum Reste $a-1$. Ebenso giebt $ab-1$ mit b dividirt den Rest $b-1$, wie folgende Rechnung zeigt:

$$a]\,ab-1\,[\,b-1 \qquad\qquad b]\,ab-1\,[\,a-1$$
$$\underline{ab-a} \qquad\qquad\qquad \underline{ab-b}$$
$$\text{Rest } a-1 \qquad\qquad \text{Rest } b-1.$$

§. 40. **Zusatz.** Auf dieselbe Art beweist man dieses für 3 und mehr Divisoren, bei welchen die Reste allemal um 1 kleiner sind, als jene:

Giebt $N:a$ den Rest $a-1$
$N:b$ „ „ $b-1$ und
$N:c$ „ „ $c-1$, so ist
$N=abc-1$, wie folgende Division zeigt:

$$a]\,abc-1\,[\,bc-1$$
$$\underline{abc-a}$$
$$\text{Rest } a-1 \text{ u. s. w.}$$

z. B. Welche Zahl giebt

durch 3, 5, 8 dividirt 2, 4, 7 zum Reste?

Antw. $120-1=119$.

Welche Zahl giebt

durch 2, 6, 12 dividirt 1, 5, 11 zum Reste?

Hier findet man $N=12-1=11$; $24-1=23$ etc.

§. 41. **Lehrsatz.** Stehen die Divisoren zu den gebliebenen Resten in gleichen arithmetischen Verhältnissen, so findet man bei einer beliebigen Anzahl derselben eine Zahl N, bei der diese Reste bleiben, wenn man von dem Producte aller Divisoren die Differenz zwischen einem Divisor und seinem Reste abzieht.

Beweis. Es gebe N mit a dividirt den Rest d
- - b - - - e
- - c - - - f, und es

sei $a-d=b-e=c-f$, so muss

$$N = abc - (a - d) \text{ sein.}$$

Denn da nach der Voraussetzung

$$a - d = b - e = c - f, \text{ so ist}$$

$$abc - (a - d) = abc - (b - e) = abc - (c - f).$$

Dividirt man nun $abc - a + d$ durch a, so erhält man $bc - 1$ zum Quotienten und d bleibt Rest.

Ebenso giebt $abc - (b - e)$ oder $abc - b + e$ durch b dividirt den Quotienten $ac - 1$ und den Rest e und endlich $abc - (c - f)$, oder $abc - c + f$ durch c dividirt, den Quot. $ab - 1$ und den Rest f. Dasselbe erstreckt sich auf jede beliebige Anzahl von Divisoren, so lange dieselben mit den entsprechenden Resten in arithmetischer Proportion stehen.

§. 42. **Beispiele.** 1) Wenn $N : 5$ den Rest 1
und $N : 8$ - - 4 giebt, so ist $N = 5 . 8 - 4 = 36$.

2) Wenn $N :$ 8 den Rest 0
und $N : 15$ - - 7 giebt, so ist $N = 8 . 15 - 8 = 112$.

Giebt $N : a$ den Rest 0
und $N : (a + 1)$ - - 1, so ist
$N = a(a + 1) - a = a^2$ (§. 30.).

3) Wenn $N : 3$ den Rest 1
$N : 4$ - - 2
$N : 5$ - - 3 giebt, so ist
$N = 3 . 4 . 5 - 2$ oder $N = 60 - 2 = 58$.

4) Giebt $N : 3$ den Rest 1
$N : 7$ - - 5
$N : 9$ - - 7, so ist $N = 3 . 7 . 9 - 2 = 187$.

Da hier 63 der kleinste Dividuus der Divisoren ist, so sind 187 — 63, oder 124; 124 — 63, oder 61 noch kleinere Zahlen, welche dasselbe leisten.

5) Giebt $N :$ 5 den Rest 3
$N :$ 7 - - 5
$N : 13$ - - 11
$N : 16$ - - 14
so ist $N = 5 . 7 . 13 . 16 - 2 = 7278$.

§. 43. **Anzahl der möglichen Auflösungen.** Bei vielen Aufgaben wünscht man hauptsächlich die Anzahl aller möglichen verschiedenen Auflösungen zu wissen; es ist daher nicht un-

wichtig, hierüber das Gesetz festzustellen und zwar für die beiden Hauptformen

$$\text{I.}\quad ax - by = \mp c$$
$$\text{II.}\quad ax + by = \mp c.$$

Verlangt man aus diesen Gleichungen die Werthe für x und y nur in absoluten, d. h. in positiven ganzen Zahlen, so kann das obere Zeichen ($-$) in II nicht statt finden, da offenbar zwei positive Zahlen keine negative Summe ($-c$) geben können.

§. 44. **Lehrsatz.** I. Die Anzahl der Auflösungen, welche die Gleichung $\quad ax - by = \mp c$

gestattet, ist unbeschränkt, dagegen muss sie

II. für die Gleichung

$$ax + by = c,$$

sobald für x und y irgend ein Werth α und β in ganzen Zahlen möglich ist, stets eine beschränkte sein und zwar ist die Gesammtzahl aller Auflösungen jederzeit um 1 grösser, als die in dem Bruche $\frac{c}{ab}$ enthaltenen Ganzen.

Beweis. Zu I. Nach §. 22. fanden wir für diese Gleichung die allgemeinen Werthe

$$\begin{cases} x = \alpha + nb \\ y = \beta + na. \end{cases}$$

Nun kann man für n irgend welche Zahl annehmen, jedesmal wird $\alpha + nb$, so wie $\beta + na$ wieder eine ganze Zahl geben, so dass folglich x und y eine unendliche Anzahl von Werthen anzunehmen fähig sind.

Zu II. Für die Auflösung der Gleichung $ax + by = c$ fanden wir ebenfalls die allgemeinen Formeln

$$\begin{cases} x = \alpha + nb \\ y = \beta - na. \end{cases}$$

Hier muss nun n so bestimmt werden, dass

$$\alpha + nb > 0$$
$$\text{und } \beta - na > 0, \text{ oder}$$
$$n > -\frac{\alpha}{b} \text{ und}$$
$$n < \frac{\beta}{a} \text{ ist.}$$

Können diese Bedingungen nicht zugleich ohne Widerspruch oder durch Zusammenfallen beider Grenzen bestehen, so zeigt diess an,

dass überhaupt keine Auflösung in positiven ganzen Zahlen möglich sei. Finden sie dagegen statt, so ist die Anzahl der Auflösungen innerhalb der Grenzen $-\frac{\alpha}{b}$ und $\frac{\beta}{a}$ enthalten, oder was einerlei ist, sie liegt zwischen $-\frac{\alpha a}{ab}$ und $\frac{\beta b}{ab}$. Nun ist $\frac{\beta b}{ab} - \left(-\frac{\alpha a}{ab}\right) = \frac{\beta b + \alpha a}{ab} = \frac{c}{ab}$; mithin ist die Gesammtzahl aller Auflösungen um 1 grösser als die in dem Bruche $\frac{c}{ab}$ enthaltenen Ganzen.

§. 45. Um den vorigen Satz auf einige Beispiele anzuwenden, so sei

1) $x + 5y = 165$.

Hier ist $\frac{c}{ab} = \frac{165}{5} = 33$. Daher giebt es 34 Auflösungen (wobei auch $x = 0$ ist, so gut wie $y = 0$).

2) Die Gleichung $5x + 12y = 864$ gestattet, da $\frac{c}{ab} = \frac{864}{60} = 14$ ist, 15 Auflösungen.

3) Aus $7x + 17y = 255$ folgt, dass sie nur 3 Auflösungen gestattet.

§. 46. **Specielle Auflösungen.** Bei der praktischen Auflösung der Zahlengleichungen von der Form $ax \mp by = c$ treten sehr oft solche Fälle ein, wo man auf einem kürzeren Wege zur Bestimmung der Werthe für die Unbekannten gelangen kann. Die Umstände, unter welchen dieses möglich ist, hängen von den Beziehungen ab, welche theils zwischen den Coefficienten a und b, theils zwischen diesen und dem dritten Gliede stattfinden und da sie leicht zu erkennen sind, so ist es nicht überflüssig, dieselben hier näher zu betrachten. Zu diesem Ende wird es aber erforderlich sein, einige Sätze als Prämissen zu begründen.

§. 47. **Lehrsatz.** Wenn bei der Gleichung $ax \mp by = c$ einer der Coefficienten a und b, z. B. a in c aufgeht, so hat die Unbekannte vom anderen Coefficienten in der Reihe ihrer Werthe auch den Nullwerth, während zugleich jene (x) den Werth des Quotienten $\left(\frac{c}{a}\right)$ besitzt, woraus sich alle übrigen Werthe für x und y ergeben.

Beweis. Geht a in c auf, so ist c als Vielfaches von a $= ma$. Dann geht die Gleichung

$$ax \mp by = ma$$

für $y = 0$ in folgende über:

$$ax = ma \text{ und giebt}$$

$$x = m.$$

Da nun nach §. 22. die x-Werthe in einer Progression nach der Differenz b fortgehen, während die y-Werthe ebenfalls eine Reihe von der Differenz a bilden, so erhält man für

$ax + by = c$ die Werthe

von $x = m, \; m \mp b, \; m \mp 2b, \ldots .$

und $y = 0, \quad \pm a, \quad \pm 2a, \ldots .$ so wie für

die Gleichung $ax - by = c$ die Werthe von

$x = m, \; m + b, \; m + 2b \ldots .$

$y = 0, \quad a, \quad 2a \quad \ldots .$ sind.

§. 48. **Zusatz.** Der vorige Satz gewährt in vielen Fällen eine überaus bequeme Auflösung einer Gleichung mit 2 Unbekannten, wozu auch selbstverständlich alle solchen Gleichungen gehören, in welchen der eine oder der andere Coefficient $= 1$ ist. Einige Beispiele mögen hier Platz finden.

1) Es sei $11x + 3y = 90.$

Man setze $x = 0$, so wird

$$y = \tfrac{90}{3} = 30.$$

Man erhält also folgende Werthe:

$x = 0, \; 3, \; 6, \; 9 \ldots$

$y = 30, \; 19, \; 8, \; -3 \ldots$

2) Es sei $x + 35y = -11.$

Man setze $y = 0$, so wird $x = -11$;

daraus fliessen folgende Werthe:

$x = -11, \; 24, \; 59, \; 94 \ldots$

$y = 0, \; -1, \; -2, \; -3 \ldots$

3) Es sei $5x - 3y = 20$, so ist für $y = 0$:

$y = 0, \; 5, \; 10, \; 15 \ldots$

$x = 4, \; 7, \; 10, \; 13 \ldots$

§. 49. **Lehrsatz.** Jede Gleichung von der Form

$$ax \mp by = c$$

kann in eine andere verwandelt werden mit zwei anderen Unbekannten, deren Coefficienten aus S u m m e und Differenz der vorigen bestehen.

Beweis. Für I. $ax - by = c$

sei $\frac{1}{2}(x + y) = p$

und $\frac{1}{2}(x - y) = q$

so ist $x = p + q$

und $y = p - q$.

Diese Werthe in die Gleichung I. gesetzt, so erhält man

$$a(p+q) - b(p-q) = c, \text{ d. i.}$$
$$ap + aq - bp + bq = c, \text{ oder}$$
$$ap - bp + aq + bq = c, \text{ also}$$
$$(a-b)p + (a+b)q = c.$$

Hierdurch ist daher die gegebene Gleichung in eine andere verwandelt von der Form

$$\alpha x + \beta y = c.$$

Nehmen wir ferner die Form

$$\text{II.} \quad ax + by = c,$$

so geht sie über in folgende:

$$a(p+q) + b(p-q) = c \text{ d. i.}$$
$$ap + aq + bp - bq = c, \text{ oder}$$
$$(a+b)p + (a-b)q = c.$$

§. 50. **Zusatz.** Auch dieser Lehrsatz gewährt in manchen Fällen eine kürzere Auflösung als die gewöhnliche Reduction, wenn nämlich die Summe der Coeff. $a + b$, oder deren Differenz $a - b$ in c aufgeht, wie folgende Beispiele zeigen:

1) Es sei gegeben: $8x - 3y = 77$.

Hier ist $8 + 3 = 11$ ein Factor von 77.

Nach I. ist daher $5p + 11q = 77$, folglich wird nach §. 47. für $p = 0$ $q = 7$. Man hat also

$$x = p + q = 7 \text{ und } y = p - q = -7,$$

wodurch nun die übrigen Werthe aus $8x - 3y = 77$ folgen, nämlich:

$$x = \quad 7,\ 10,\ 13,\ 16 \ldots.$$
$$y = -7,\ \ 1,\ \ 9,\ 17 \ldots.$$

2) Gegeben $11x + 7y = 180$.

Setzt man $\frac{1}{2}(x + y) = p$ und $\frac{1}{2}(x - y) = q$, so hat man:

$$18p + 4q = 180, \text{ oder}$$
$$9p + 2q = 90.$$

Für $q = 0$ ist also $p = 10$, folglich

$$x = p + q = 10 \text{ und } y = p - q = 10.$$

Daher sind nach der gegebenen Gleichung die übrigen Werthe

$$x = 3,\ 10,\ 17$$
$$y = 21,\ 10,\ -1.$$

3) Gegeben $7x + 4y = 39$.
Man findet hier sogleich
$$11p + 3q = 39, \text{ folglich}$$
$$\text{für } p = 0 \text{ ist } q = 13, \text{ also}$$
$$x = p + q = 13;\ y = p - q = -13,$$
wodurch die übrigen Werthe sich finden, nämlich:
$$x = 13,\ 9,\ 5,\ 1.$$
$$y = -13,\ -6,\ 1,\ 8.$$

§. 51. Wenn bei der Gleichung $ax - by = c$ keiner der Coefficienten a und b in dem 3ten Gliede c aufgeht, so multiplicire man dasselbe mit dem kleinsten von jenen. Diess sei z. B. a. Dann geht die Gleichung über in eine andere
$$ax_1 - by_1 = ac,$$
in welcher die Grösse y_1 des Nullwerthes fähig ist (§. 47.). Man setze nun $y_1 = 0$, dann wird $x_1 = c$ und es ist somit für letztere Gleichung eine Auflösung in ganzen Zahlen hergestellt, indem sich die Reihen bilden:
$$\begin{cases} x_1 = c,\ c+b,\ c+2b,\ c+3b,\ \ldots \\ y_1 = 0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots \end{cases}$$
Um nun hierdurch auch die gegebene Gleichung aufzulösen, hat man nur nöthig, die $a$mal zu grossen Werthe für x, y, wieder mit a zu dividiren.

Bei der Reihe der y_1-Werthe geht dieses ohne Weiteres von statten; allein bei den x_1-Werthen wird zwar in vielen Fällen, wo a, b, c kleinere Zahlen sind, bald ein durch c theilbares Glied aufgefunden werden, ohne die Glieder der Reihe weit zu entwickeln. Sind dagegen a, b, c mehr als zweiziffrige Zahlen, so würde, wenn nicht das betreffende durch a theilbare Glied durch ein Gesetz bald bestimmbar ist, dieses Verfahren sehr weitläufig und deshalb unpraktisch werden.

Uebrigens bleibt das Verfahren bei der Gleichung $ax + by = c$ ganz dasselbe.

§. 52. Wir wollen nun diese Vorschrift durch einige Beispiele erläutern.

1) Es sei gegeben $3x - 5y = 1$.
Mult. man das dritte Glied mit 3, so erhält man
$$3x_1 - 5y_1 = 3.$$

Setzt man $y_1 = 0$, so folgt $x_1 = 1$. Wenn also

$$\left.\begin{array}{ll} & y_1 = 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12 \ldots. \\ \text{so ist} & x_1 = 1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21 \ldots. \end{array}\right\} \text{Diese Werthe mit 3 divid.}$$

$$\begin{array}{l} \text{giebt } y = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots. \\ \qquad x = \tfrac{1}{3},\ 2,\ *\ *\ 7 \ldots. \end{array}$$

Es sind demnach 1 und 2, so wie 4 und 7 schon 2 Auflösungen, zu welchen sich andere nach §. 22. leicht ergeben.

2) Gegeben $7x + 5y = 73$ (5
$7x_1 + 5y_1 = 365$

x_1	=	0,	5,	10,	15,	20,	25,	30,	35,	40,	45 ...
y_1	=	73,	66,	59,	52,	45,	38,	31,	24,	17,	10 ...
x	=	*	*	*	*	4	*	*	*	*	9 ...
y	=	*	*	*	*	9	*	*	*	*	2 ...

3) Gegeben $19x + 7y = 117$ (7
$19x_1 + 7y_1 = 819$

x_1	=	0,	7,	14 ...
y_1	=	117,	98,	79 ...
x	=	*	1	u. s. w.
y	=	*	14	

4) Hat einer der Coefficienten z. B. b mit c einen gemeinschaftlichen Factor, so braucht man nur c mit dem anderen Factor zu multipliciren.

Gegeben $15x - 4y = 2$ (2
$15x_1 - 4y_1 = 4$

x_1	=	0,	4,	8,	12 ...
y_1	=	−1,	14,	29,	44 ...
x	=	*	2	*	6 ...
y	=	*	7	*	22 ...

5) Gegeben $6x - 5y = 2$ (3
$6x_1 - 5y_1 = 6.$

x_1	=	1,	6,	11,	16,	21 ...
y_1	=	0,	6,	12,	18,	24 ...
x	=	*	2	*	*	7 ...
y	=	*	2	*	*	8 ...

6) Gegeben $11x - 12y = 3$ (4
$11x_1 - 12y_1 = 12,$ also für $x_1 = 0$ ist $y_1 = -1.$

$$\begin{array}{rrrrr}
\text{daher: } x_1 = & 0, & 12, & 24, & 36 \ldots \\
y_1 = & -1, & 10, & 21, & 32 \ldots \\
\hline
x = & 0, & 3, & 6, & 9 \ldots \\
y = & * & * & * & 8 \ldots
\end{array}$$

§. 53. **Lehrsatz.** Wenn eine Gleichung von der Form

I. $ax - by = c$,

wo a prim zu b, auch c kein Vielfaches von a oder b ist — in eine andere Gleichung durch Multiplication mit einem der Coefficienten a oder b verwandelt ist, wie z. B.

II. $ax_1 - by_1 = ac$,

bei welcher die Grösse y_1 des Nullwerthes fähig ist; so liegen in den arithmetischen Reihen der x_1- und y_1-Werthe, die durch a theilbaren Glieder allemal in einem Abstande von a Gliedern, d. h. von diesem um a Glieder weiter.

Beweis. Aus II. folgt für $y_1 = 0$, $x_1 = c$.

Wenn also $\begin{cases} y_1 = 0, & a, & 2a, & 3a \ldots \\ x_1 = c, & c+b, & c+2b, & c+3b \ldots \end{cases}$

so ist $\begin{cases} y = 0, & 1, & 2, & 3 \ldots \\ x = \dfrac{c}{a}, & \dfrac{c+b}{a}, & \dfrac{c+2b}{a}, & \dfrac{c+3b}{a} \ldots \end{cases}$

Da nun a weder in c, noch in b aufgeht (e. h.), so kann a nur dann in $c + b$ aufgehen, sobald a in der Summe der Reste aufgeht, welche c und b, durch a dividirt, geben.

Gesetzt, a ginge in $c + b$ auf, so würde dieses zunächst wiederum der Fall sein, wenn man so viel Glieder weiter geht, als a Einheiten hat; denn das $a$te Glied nach diesem $\dfrac{c+b}{a}$ ist: $\dfrac{c+(a+1)b}{a}$, oder $\dfrac{c+ab+b}{a}$, wo also a in $c + b + ab$ aufgeht. Dasselbe gilt offenbar von jedem anderen Gliede dieser Reihen, sei es auch, dass das treffende Glied auf der einen oder anderen Seite des Nullwerthes von y_1 liege.

§. 54. **Zusatz.** Der vorige Satz gilt ebensowohl von der Gleichung $ax + by = c$ und ist derselbe daher bei dieser Auflösungsmethode allgemein gültig.

Hat man also bei einer numerischen Gleichung für die beiden Unbekannten erst einen Werth in ganzen Zahlen bestimmt, so sind sogleich noch andere Werthe zu finden, die in einem gewissen Ab-

stande, der sich nach dem Theilungscoefficienten ergiebt, eine neue Progression bilden.

§. 55. Es sei z. B. die Gleichung gegeben:

$3x - 2y = 1$, so verwandelt sich dieselbe in

$3x_1 - 2y_1 = 2$. Wenn daher

$$\text{I} \begin{cases} y_1 = -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 \dots \\ x_1 = -2, \quad 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \dots \end{cases}$$

$$\text{so ist} \begin{cases} y = -2, \quad 1, \quad 4, \quad 7, \quad 10 \dots \\ x = -1, \quad 1, \quad 3, \quad 5, \quad 7 \dots \end{cases}$$

Hier sieht man deutlich den Fortschritt der durch 2 theilbaren Werthe in der Reihe I.

Auflösung der Gleichung $ax - by = c$ durch Zurückführung auf den Lehrsatz von M. Stifel.

§. 56. Die Idee, die Stifelsche Regel (nach welcher die Gleichung $ax - by = c$ allemal aufgelöst werden kann, sobald $b = a \mp 1$ ist) zu erweitern, lässt sich durch eine kleine Umwandlung realisiren.

Man setze $by = (a+1)z$. (1)

Dann ist $ax - (a+1)z = c$ (2)

Dieser Gleichung entspricht nun die Aufgabe: Eine Zahl N zu finden, welche durch a theilbar, durch $a+1$ getheilt aber den Rest c giebt. Diese Zahl N ist nun nach jener Regel $= a^2c$. Es ist demnach

$$(3) \quad \begin{cases} ax = a^2c \\ (a+1)z + c = a^2c, \text{ folglich} \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} x = ac \\ z = \dfrac{a^2c - c}{a+1} = c(a-1), \text{ daher} \end{cases}$$

$$(5) \quad by = (a+1)z = a^2c - c = (a^2-1)c \text{ und mithin}$$

$$(6) \quad y = \frac{(a^2-1)c}{b} = \frac{(a+1)(a-1)c}{b}.$$

Diese Auflösung giebt nun für x und y sogleich ganze Zahlen, wenn der Coefficient

$$b \text{ in} \begin{cases} c \\ a \mp 1 \\ a^2 - 1. \end{cases} \text{ aufgeht.}$$

§. 57. **Beispiele.** 1) Gegeben $5x - 3y = 6$.

Hier ist $x = 30$ und $y = 48$ (nach 4 und 6).

2) Gegeben $7x - 16y = 3$.

Hier geht 16 in $7^2 - 1$, d. i. in 288 auf. Daher ist

$$x = 21,\ 37 \ldots.$$
$$y = 9,\ 14 \ldots.$$

3) Gegeben $13x - 4y = 11$.

Da 4 in $(13 - 1)$ aufgeht, so ist

$$\begin{matrix} x = 143 \\ y = 462 \end{matrix} \text{ etc.}$$

4) Gegeben $4x - 3y = 7$

$$\begin{matrix} x = 28 \\ y = 35 \end{matrix} \text{ etc.}$$

5) Gegeben $6x - 5y - 9$

$$\begin{matrix} x = 54 \\ y = 63 \end{matrix} \text{ etc.}$$

6) Gegeben $5x - 12y = 1$.

$$\begin{matrix} x = 5 \\ y = 2 \end{matrix} \text{ etc.}$$

7) Gegeben $19x - 15y = 1$.

$$\begin{matrix} x = 19 \\ y = 24 \end{matrix} \text{ etc.}$$

8) Gegeben $17x - 24y = 1$

$$\begin{matrix} x = 17 \\ y = 12 \end{matrix} \text{ etc.}$$

§. 58. **Zusatz.** Wenn bei der Gleichung

$$ax - by = c$$

der Coefficient a entweder in $b \mp 1$, oder in $b^2 - 1$ aufgeht, so lässt sich die Auflösung dieser Gleichung ebenfalls auf die vorige zurückführen. Man braucht zu diesem Ende die gegebene Gleichung nur mit -1 zu multipliciren, wodurch man das erste Glied mit dem zweiten vertauscht. Aus $ax - by = c$ wird also

$$by - ax = -c$$

und man erhält sogleich $y = -bc$.

z. B. Es sei $3x - 5y = 2$.

Da hier 3 in $5 + 1$ aufgeht, so setze man

$$5y - 3x = -2.$$

Dann ist $y = -10$ und $x = \frac{6.4. - 2}{3} = -16$.

Es ergeben sich nun hieraus vorwärts gehend, die Werthe für x und y, nämlich:

$$\begin{cases} x = -16, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19 \dots \\ y = -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11 \dots \end{cases}$$

Es sei ferner gegeben:

$$60x - 11y = 7.$$

Da 60 in $11^2 - 1$ aufgeht, so hat man:

$$11y - 60x = -7, \text{ folglich}$$

$$y = -77 \text{ und } x = \frac{120 . -7}{60} = -14.$$

§. 59. **Lehrsatz.** Bei je zwei arithmetischeu Progressionen sind die Unterschiede zwischen deu wechselseitigen Producten aus zwei zunächst auf einander folgenden Gliedern constant und zwar ebenso gross, als der Unterschied, welchen das erste Glied der einen Reihe mit dem Exponenten der andern multiplicirt und dem Producte aus dem ersten Gliede der anderen Reihe mit dem Exponenten von jener giebt.

Beweis. Nimmt man z. B. die beiden Progressionen

$$\begin{array}{lllll} 3, & 8, & 13, & 18, & 23 \dots (\text{Exp. } 5) \text{ und} \\ 4, & 7, & 10, & 13, & 16 \dots (\text{Exp. } 3) \end{array}$$

so ist $4.8 - 3.7 = 7.13 - 8.10 = 10.18 - 13.13$ u. s. f.
$= 4.5 - 3.3 = 11.$

Nun seien allgemein die beiden Reihen:

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d \dots\dots a + (n-1)d, \quad a + nd \dots\dots (d$$

$$b, \quad b + c, \quad b + 2c \dots\dots b + (n-1)c, \quad b + nc \dots\dots (c$$

so muss, wenn man die n^{ten} und $n + 1^{ten}$ Glieder beider Reihen wechselseitig multiplicirt und diese Producte subtrahirt, die Differenz ebenso gross sein, als $ac - bd$.

Denn es ist die Differenz dieser Producte

$$\left(a + (n-1)d\right)\left(b + nc\right) - \left(b + (n-1)c\right)\left(a + nd\right)$$

und die wirkliche Multiplication ergiebt

für $\left(a + (n-1)d\right) \times (b + nc) = ab + (n-1)bd + anc + (n-1)dnc$
und $\left(b + (n-1)c\right) \times (a + nd) = ab + (n-1)ac + bnd + (n-1)cnd.$

Folglich die Differenz $= -bd + ac$ oder $ac - bd$,
womit der Satz bewiesen ist.

Ist die eine Progression steigend, die andere fallend, so ändert diess die Sache nicht.

§. 60. **Zusatz** 1. Nimmt man die reciproken Producte von zwei beliebigen correspondirenden Gliedern dieser Reihen, z. B.

die ersten und n^{ten} u. s. w., so ist die Differenz derselben = dem $(n-1)$ fachen von $ac-bd$. Denn man hat:

$$a\times\left(b+(n-1)c\right)-b\times\left(a+(n-1)d\right)=a(b+nc-c)-b(a+nd-d)$$
$$= ab+anc-ac-[ab+nbd-bd]$$
$$= anc-ac-nbd+bd = n(ac-bd)-(ac-bd)$$
$$= (n-1)(ac-bd).$$ So ist z. B. bei den Reihen

3, 8, 13, 18, 23, 28 . . .
4, 7, 10, 13, 16, 19 . . .

$4 \,.\, 28-3 \,.\, 19 = 55 = 5(11)$

$7 \,.\, 23-8 \,.\, 16 = 33 = 3(11)$ u. s. w.

§. 61. **Zusatz** 2. Das erste Glied der ersten Reihe multiplicirt mit dem Exponenten der zweiten, weniger dem Producte aus dem ersten Gliede der zweiten Reihe und dem Exponenten der ersten, ist ebenso gross als der Unterschied der beiden Producte aus dem n^{ten} Gliede der 1ten Reihe*) mit dem Exponenten der 2ten und dem aus dem n^{ten} Gliede der 2ten Reihe mit dem Exponenten der ersten. Oder es ist bei den Reihen

$$a,\; a+d,\; a+2d \;.\;.\;.\;.\;.\; a+nd \;.\;.\;.\;.\;.\; (d$$
$$b,\; b+c,\; b+2c \;.\;.\;.\;.\;.\; b+nc \;.\;.\;.\;.\;.\; (c$$
$$c\,.\,a-d\,.\,b = c(a+d)-d(b+c)$$
$$= c(a+nd)-d(b+nc)$$

wie solches die Auflösung der Klammern sogleich ergiebt. z. B. für die Reihen

3, 8, 13, 18, 23, 28 . . . . (5
4, 7, 10, 13, 16, 19 . . . . (3 hat man

$3.3-5.4 = 3.28-5.19 = 3.13-5.10$ etc. $= -11$.

§. 62. **Lehrsatz.** Sind die aus der Gleichung

$ax \mp by = c$ gefundenen Werthe:

$$\begin{cases} x = x',\; x'',\; x''', \;.\;.\;.\;.\;. \\ y = y',\; y'',\; y''' \;.\;.\;.\;.\;. \end{cases}$$

so ist allemal die Differenz zweier wechselseitigen Producte dem dritten Gliede c gleich, d. h. es ist:

$$x'\times y''-x''\times y' = c, \text{ oder auch}$$
$$y'\times x''-y''\times x' = c.$$

Beweis. Da zunächst $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ coordinirte Werthe der Unbekannten sind, so ist

*) Nach dem Anfangsgliede.

$ax' \mp by' = c$ und ebenso ist, da auch

$\begin{cases} x = x'' \\ y = y'' \end{cases}$ der Gleichung Genüge leisten:

$ax'' \mp by'' = c.$

Es bilden aber die successiven Werthe von x und y zwei Reihen:

$x = x', x'', x'''$ . . . . . . vom Expon. b.

$y = y', y'', y'''$ . . . . . . vom Expon. a.

Nun ist $x' . y'' - y' . x'' = c$; denn es ist

b der Exponent der obern Progression

und a „ „ „ untern „ ;

folglich ist diese Differenz $= ax' - by'$ (nach §. 59.) und, da diese $= c$ ist, so muss es auch jene sein.

§. 63. **Zusatz.** Aus der Gleichung $6x - 7y = -2$ fanden wir (§. 5.) die Werthe:

$x = 2,\ 9,\ 16,\ 23$ . . . . .

$y = 2,\ 8,\ 14,\ 20$ . . . . .

Es ist also $2 . 8 - 2 . 9 = -2$

$9 . 14 - 8 . 16 = -2$ u. s. w.

Aus der Gleichung $4x + 3y = 50$ fanden wir (§. 8.)

$x = 2,\ 5,\ 8,\ 11$ . . . .

$y = 14,\ 10,\ 6,\ 2$ . . . .

Daher $14 . 5 - 2 . 10 = 50,$

sowie $10 . 8 - 5 . 6 = 50$ u. s. w.

Ebenso sind aber auch die Differenzen

$2 . 10 - 14 . 5$ und $5 . 6 - 10 . 8$ gleich gross, obgleich negativ.

Bei der Gleichung $11x + 3y = 90$,

ist $x = 0,\ 3,\ 6$

$y = 30,\ 19,\ 8$

folglich $30 . 3 - 0 . 19 = 19 . 6 - 3 . 8 = 90.$

Kennt man von dieser Gleichung nur das 3te Glied 90 und es sind die 3 Werthe bekannt:

$x = 3$ und 6

$y = 19,$

so kann man den zweiten auf 19 folgenden Werth hierdurch finden. Heisse dieser y'', so ist

$19 \times 6 - 3 \times y'' = 90$, oder

$114 - 3y'' = 90,$

folglich $y = \dfrac{114 - 90}{3} = 8.$

Auflösung der unbestimmten Gleichung $ax \mp by = c$, vermittelst arithmetischer Reihen.

§. 64. Die beiden vorigen Lehrsätze bilden die Grundlage zu einer neuen Auflösungs-Methode der unbestimmten Gleichungen ersten Grades in ähnlicher Weise, wie diess durch die Anwendung der Kettenbrüche geschieht, indem man von der Form $ax \mp by = 1$ zu der $ax \mp by = c$ übergeht.

Es ist klar, dass wenn z. B. die Gleichung

$$1)\quad 5x - 3y = 11$$

aufgelöst werden sollte und man hätte bereits für die einfachere Form

$$2)\quad 5x - 3y = 1$$

irgend ein Paar coordinirte Werthe von x und y gefunden, so würde, dieselben in die Gleichung 2. substituirt, durch Multiplication mit 11, auch eine Auflösung der vorgelegten Gleichung erhalten werden.

Dasselbe gilt von der zweiten Form $ax + by = c$. Denn gesetzt, es sollte die Gleichung

$$3x + 5y = 82$$

aufgelöst werden und man wüsste, dass für

$$3x + 5y = 1 \text{ die Werthe } \begin{cases} x = +2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ genügten, so}$$

würde man haben:

$3(+2) + 5(-1) = 1$ und folglich durch Multiplication auf beiden Seiten mit 82 die neue Gleichung

$3(164) + 5(-82) = 82$ ebenfalls eine Auflösung darbieten, wo also $x = 164$ und $y = -82$ ist.

§. 65. Um eine Gleichung von der Form

$$ax \mp by = c$$

aufzulösen, beobachte man folgende Regel:

1) Man bilde zwei arithmet. Progressionen, welche mit 1 anheben, deren eine mit dem Exponenten (a) = dem Coeff. von x, deren andere mit dem Exponenten (b) = dem Coeff. von y fortschreitet.

2) Alsdann nehme man die Differenz der Coeff. $a - b$ und berechne nach §. 61. die Differenz zweier reciproken Produkte von solchen Gliedern der Progr., welche durch den Unterschied der Exponenten $(a - b)$ theilbar sind — welche man durch Entwickelung von mehr oder weniger Gliedern bald findet *).

*) Man wird nur nöthig haben, die Reihe bis zu dem Gliede zu entwickeln, welches die Differenz $a - b$ anzeigt — also bis höchstens zum $a - b^{ten}$ Gliede —

3) Man dividire die Glieder dieser neuen Gleichung durch die in 2 gefundene Differenz und behalte die Coefficienten a und b ungeändert bei, so dass dadurch die positive oder negative Einheit auf der rechten Seite erhalten wird.

4) Endlich multiplicire man die so geänderte Gleichung mit dem dritten Gliede c, ohne die Coefficienten a, b zu berühren, so hat man dadurch zwei coordinirte Werthe für die Unbekannten gefunden.

5) Ist die Differenz $a-b$, so wie auch c eine mehrziffrige Zahl, so erhält man gemeiniglich auch grössere Zahlenwerthe für x und y. Um jedoch die kleinsten zu erhalten, braucht man nur von ihnen ein so grosses Vielfaches zu subtrahiren resp. zu addiren, als der Coeff. der einen Unbekannten in dem gefundenen Werthe der anderen enthalten ist.

§. 66. **Beispiele zur Erläuterung.**

1) Gegeben: $3x - 5y = 1$

$$1,\ 4,\ 7\ \ldots\ldots\ (3$$
$$1,\ 6,\ 11\ \ldots\ldots\ (5$$
$$-2)\frac{3(6) - 5(4) = -2}{3(-3) - 5(-2) = +1}$$

folglich $x = -3,\ 2,\ 7,\ 12\ \ldots$

$y = -2,\ 1,\ 4,\ 7\ \ldots$

2) Gegeben $17x - 19y = 3$.

$$1,\ 20,\ 39,\ 58\ \ldots\ldots\ (19$$
$$1,\ 18,\ 35,\ 52\ \ldots\ldots\ (17$$
$$-2)\frac{17(20) - 19(18) = -2}{17(-10) - 19(-9) = +1}(3$$
$$17(-30) - 19(-27) = 3$$

$x = -30 + 19n$, $y = -27 + 17n$; für $n = 2$ erhält man $x = 8$, $y = 7$.

3) Gegeben $5x - 3y = 11$.

$$1,\ 4,\ 7,\ 10\ \ldots\ldots\ (3$$
$$1,\ 6,\ 11,\ 16\ \ldots\ldots\ (5$$
$$2)\frac{5(4) - 3(6) = 2}{5(2) - 3(3) = 1}(11$$
$$5(22) - 3(33) = 11$$

$x = 22$

$y = 33$.

---

und unter diesen immer Eins finden, welches durch $a-b$ theilbar ist, da alle durch $a-b$ theilbaren Glieder in einem Abstande von $a-b$ Gliedern liegen.

4) Gegeben $3x - 5y = 11$.

$1,\ 6,\ 11 \ldots\ldots$ (5

$1,\ 4,\ 7 \ldots\ldots$ (3

$$-2)\ \frac{3(6) - 5(4) = -2}{3(-3) - 5(-2) = +1} \quad (11$$

$$3(-33) - 5(-22) = 11$$

mithin $x = -33 + 5n$
und $y = -22 + 3n$ für $n = 8$, wird $x = 7$, $y = 2$.

5) Gegeben: $3x + 5y = 82$.

$1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26 \ldots\ldots$ (5

$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16 \ldots\ldots$ (3

$$-2)\ \frac{3(6) - 5(4) = -2}{3(-3) + 5(+2) = +1} \quad (82$$

$$3(-246) + 5(+164) = 82$$

$x = -246 + 5n$
$y = 164 - 3n$, für $n = 54$, ist $x = 24$, $y = 2$.

6) Gegeben: $25x - 6y = 16$.

$1,\ 7,\ 13,\ 19 \ldots\ldots$ (6

$1,\ 26,\ 51,\ 76 \ldots\ldots$ (25

$$19)\ \frac{25(19) - 6(76) = 19}{25(1) - 6(4) = 1} \quad (16$$

$$25(16) - 6(64) = 16$$

$x = 16$
$y = 64$.

7) Gegeben: $31x - 5y = 249$.

$1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26 \ldots\ldots$ (5

$1,\ 32,\ 63,\ 94,\ 125,\ 156 \ldots\ldots$ (31

$$26)\ \frac{31(26) - 5(156) = 26}{31(1) - 5(6) = 1} \quad (249$$

$$31(249) - 5(1494) = 249$$

folgl. $x = 249 - 5n$ und $y = 1494 - 31n$,
für $n = 49$, erhält man $x = 4$, $y = -25$ dann 9, 6 u. s. w.

8) Gegeben $19x - 11y = 60$.

$1,\ 12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 56,\ )\ 67 \ldots\ldots$ (11

$1,\ 20,\ 39,\ 58,\ 77,\ 96,\ ) \ldots\ldots\ldots$ (19

$$8)\ \frac{19(56) - 11(96) = 8}{19(7) - 11(12) = 1} \quad (60$$

$$19(420) - 11(720) = 60.$$

$x = 420 - 11n$ für $n = 38$ erhält man:
$y = 720 - 19n$

$x = 2, 13 \ldots.$
$y = 2, 17 \ldots.$

9) Gegeben: $26x + 7y = 610$.

1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57 .... (7
1, 27, 53, 79, 105, 131, 157, 183, 209 .... (26

$$19)\frac{26(57) \quad -7(209) \quad = 19}{26(3) \quad +7(-11) \quad = 1}(610$$
$$26(1830) + 7(-6710) = 610$$

$x = 1830 - 7n$ für $n = 261$, erhält man $\begin{cases} x = 3. \\ y = 76. \end{cases}$
$y = -6710 + 26n$

10) Gegeben: $24x + 7y = 1000$.

1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71, 78, 85... (7
1, 25, 49 . . . . 289 ... (24.

Man braucht nur eine der Reihen so lange fortzusetzen, bis sich ein durch (24 — 7) d. i. 17 theilbares Glied findet, indem das zugehörige der andern Reihe durch die Formel: $t = a + (n - 1)d$ leicht bestimmt. Man wird daher allemal diejenige-Reihe zuerst entwickeln, welche den kleinsten Exponenten hat. Der Grund liegt in §. 61 *).

Da nun

$$17)\frac{24(85) \quad -7(289) \quad = 17}{24(5) \quad +7(-17) \quad = 1}(1000 \text{, so ist}$$
$$24(5000) + 7(-17000 = 1000. \text{ Es ist also}$$

$x = 5000 - 7n$ und für $n = 714$ ist: $\begin{cases} x = 2. \\ y = 136. \end{cases}$
$y = -17000 + 24n$

---

*) Es ist nämlich bei zwei Progressionen, deren Glieder mit der Einheit anheben, wie z. B.

$1, 1+d, 1+2d \ldots\ldots 1+(n-1)d \ldots\ldots (d$
$1, 1+c, 1+2c \ldots\ldots 1+(n-1)c \ldots\ldots (c$

die Relation: $c - d = [1+(n-1)d] . c - [1+(n-1)c] d$,
folglich muss, sobald das n^{te} Glied der einen oder andern Reihe durch $(c - d)$ theilbar ist, auch das n^{te} Glied der anderen Reihe dadurch aufgehen, weil sonst keine Gleichheit bestehen würde.

II. Capitel.

Von der Auflösung solcher Aufgaben, welche drei Unbekannte enthalten und nur zwei Gleichungen darbieten.

§. 67. Im Allgemeinen lässt sich die Regel für die Auflösung einer Aufgabe mit 3 Unbekannten und 2 unabhängigen Gleichungen so aussprechen:

Man entwickele aus den Bedingungen der Aufgabe die beiden Gleichungen, deren jede die drei Unbekannten x, y, z enthält und eliminire eine von diesen aus jeder Gleichung — ein Verfahren, welches dem ganz ähnlich ist, wo man bestimmte Gleichungen mit 2 Unbekannten aufzulösen hat. Dadurch gelangt man zu einer Gleichung mit zwei Unbekannten, deren weitere Auflösung in dem Vorigen erklärt ist.

Sei z. B. gegeben:

1) $14x + 11y + 9z = 360$,

2) $x + y + z = 30$.

Es sollen für x, y, z solche ganze Zahlen gefunden werden, welche jedesmal beiden Gleichungen Genüge leisten.

Multiplicirt man die Gleichung (2) mit 9, so erhält man:

3) $9x + 9y + 9z = 270$.

Zieht man diese Gleichung von der ersten ab, so erhält man:

4) $5x + 2y = 90$.

Aus dieser Gleichung ergiebt sich der Werth von x und y in Gliedern einer unbestimmten Grösse A, nämlich:

5) $x = 18 - 2A$ und

6) $y = 5A$; daher nach (2).

7) $z = 12 - 3A$.

Wenn also $A =$	1,	2,	3,	4,	5 . . . .
so ist $y =$	5,	10,	15,	20,	25 . . . .
$x =$	16,	14,	12,	10,	8 . . . .
$z =$	9,	6,	3,	0,	—3 . . . .

§. 68. Eliminirt man aus den beiden Gleichungen

1) $14x + 11y + 9z = 360$

2) $x + y + z = 30$

die Grösse x, so erhält man die Gleichung

3) $3y + 5z = 60$.

Aus dieser findet man:

$$y = 20 - 5B$$

$z = 3B$ und nach Gleichung (2)

$$x = 10 + 2B.$$

Ist also	$B =$	0,	1,	2,	3,	4 ....
so ist	$x =$	10,	12,	14,	16,	18 ....
	$y =$	20,	15,	10,	5,	0 ....
	$z =$	0,	3,	6,	9,	12 ....

Man sieht daraus, dass die Elimination derjenigen Unbekannten, welche den kleinsten Coefficienten hat, nicht immer die Auflösung vereinfacht.

Eliminirt man die Unbekannte y, so bekommt man die Gleichung

$$3x - 2z = 30.$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergiebt:

$$z = 3A - 15$$

$x = 2A$ und durch Substitution dieses Werthes

in (1) $y = 45 - 5A.$

Wenn also	$A =$	6,	7,	8,	9 ....
so ist	$x =$	12,	14,	16,	18 ....
	$y =$	15,	10,	5,	0 ....
	$z =$	3,	6,	9,	12 ....

Es sind daher für die gegebenen Gleichungen nur drei verschiedene Auflösungen in ganzen positiven Zahlen möglich.

§. 69. Nicht immer sind zwei Gleichungen aus der Aufgabe herzuleiten, deren jede drei Unbekannte enthält, obgleich x, y, z darin vorkommen.

Es seien z. B. drei Zahlen zu bestimmen, deren Eigenschaften durch die Gleichungen

1) $20x - 21y = 38$ und

2) $3y + 4z = 34$ gegeben werden.

Dann verfährt man folgendermassen: Aus (1) suche man den Werth von x, so findet man:

$$x = y + 1 + \frac{y + 18}{20}.$$

Es sei $y + 18 = 20A$, so folgt

$y = 20A - 18$ und daher

$$x = 21A - 17.$$

Setzt man den Werth von y in die Gleichung (2), so erhält man:

$$60A - 54 + 4z = 34$$
also $z = 22 - 15A$.

Ist nun $A = 1$, so ist $y = 2$; $x = 4$; $z = 7$, und wegen des Ausdruckes für z können andere Werthe für x, y, z nicht stattfinden.

Wir wollen nun zur Uebung einige Aufgaben vornehmen, wobei sich das Verfahren der Auflösung leicht übersehen lässt.

§. 70. **Aufgabe.** Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dass sie durch 3 getheilt, den Rest 2, durch 7 getheilt, den Rest 3, und durch 10 getheilt, den Rest 9 geben.

Auflösung. Ist N eine solche Zahl, so erhält man folgende Gleichungen:

$$N = 3x + 2 = 7y + 3 = 10z + 9.$$

Man bestimme zunächst N, den beiden ersten Bedingungen entsprechend, dann hat man

1) $x = 2y + \frac{y+1}{3}$. Man setze

2) $y + 1 = 3A$, so ist

3) $y = 3A - 1$; folglich

4) $N = 7y + 3 = 21A - 4$.

Um nun der dritten Bedingung zu genügen, setze man

5) $N = 21A - 4 = 10z + 9$, oder

$10z = 21A - 13$, folglich

6) $z = 2A - 1 + \frac{A-3}{10}$.

Setzt man $A - 3 = 10B$, so folgt

7) $A = 10B + 3$; mithin ist nach 5 und 6

$N = 210B + 59$.

Nimmt man nun

$B = 0, \quad 1, \quad 2 \ldots.$, so ist

$N = 59, \; 269, \; 689 \ldots.$

§. 71. Anmerkung. Man kann diese Gleichungen für N auch unter der Form

$$\frac{N}{3} = x + \frac{2}{3}$$

$$\frac{N}{7} = y + \frac{3}{7}$$

$$\frac{N}{10} = z + \frac{9}{10}$$

betrachten, wo für 4 Unbekannte 3 Gleichungen gegeben sind.

§. 72. **Aufgabe.** Für 20 Ggr. sollen 20 Töpfe von dreierlei Grösse gekauft werden und zwar die grössten von 2 Ggr., die mittleren von 1 Ggr., die kleinsten von $\frac{1}{2}$ Ggr. Wie viel bekommt man von jeder Sorte?

Auflösung. Die Anzahl der grössten sei $= x$, die der mittleren $= y$ und die kleinsten $= z$, so erhält man folgende Gleichungen:

1) $2x + y + \frac{1}{2}z = 20.$

2) $x + y + z = 20.$

Zieht man die Gleichung (2) von (1) ab, so kommt:

3) $x - \frac{1}{2}z = 0$, oder

$2x - z = 0$, also

4) $z = 2x.$

Aus der Gleichung (2) ergiebt sich nun

$y = 20 - x - z$, oder nach (4)

5) $y = 20 - 3x.$

Nimmt man daher

$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, so ist

$z = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ und

$y = 17, 14, 11, 8, 5, 2.$

§. 73. Aus (4) konnte man auch sogleich nach §. 18. folgern: $x = 1A$ und $z = 2A$, wodurch für x und z die Werthe entstehen, nämlich:

für $A = 1, 2, 3, 4 \ldots.$

folgt: $x = 1, 2, 3, 4 \ldots.$

und $z = 2, 4, 6, 8 \ldots.$,

so dass nur noch y zu bestimmen wäre. Aus (2) und (4) folgt

$20 - 3x = y = 17, 14, 11, 8$ u. s. f.

§. 74. **Aufgabe.** Jemand hat 9löthiges, 12löth. und 14löth. Silber und will 5 Mark 13½löthiges hieraus verfertigen; wie viel Lothe muss er von jeder Sorte dazu nehmen?

Auflösung. Er nehme x Loth 9löthiges, y Loth 12löth. und z Loth 14löth. Silber, so erhält man die beiden Gleichungen:

1) $x + y + z = 80.$

2) $14x + 12y + 9z = 1080.$

Mult. man die Gleichung (1) mit 12 und subtrahirt sie dann von (2), so ergiebt sich

$2x - 3z = 120.$

Folglich ist $x = \frac{3z+120}{2} = z + 60 + \frac{z}{2}$.

Man setze $z = 2A$, so wird

$x = 3A + 60$ und durch Substitution der Werthe von x und z in die Gleichung (1) erhält man

$y = 20 - 5A$. Nimmt man nun den Werth von

$A = 1, \; 2, \; 3$, so findet man

$x = 63, \; 66, \; 69$

$y = 15, \; 10, \; 5$

$z = 2, \; 4, \; 6$

und andere Auflösungen in ganzen Zahlen sind nicht möglich.

§. 75. **Aufgabe.** Ein Getreidehändler soll 120 Malter Korn für 540 Thlr. liefern; er nimmt dazu dreierlei Sorten, die eine das Malter zu $3\frac{3}{4}$ Thlr., die andere das Malter zu $4\frac{2}{3}$ Thlr., die dritte das Malter zu $5\frac{1}{6}$ Thlr.; wie viel Malter muss er von jeder Sorte nehmen?

Auflösung. Er nehme x Malt. von der ersten Sorte,
y - - - zweiten -
z - - - dritten -

so ist 1) $x + y + z = 120$

2) $3\frac{3}{4}x + 4\frac{2}{3}y + 5\frac{1}{6}z = 540$.

Um die Brüche wegzuschaffen, mult. man die Gleichung (2) mit 12, so erhält man:

3) $45x + 56y + 62z = 6480$.

Mult. man nun die Gleichung (1) mit 56, so wird

4) $56x + 56y + 56z = 6720$.

Zieht man die 3te Gleichung von der 4ten ab, so bleibt:

5) $11x - 6z = 240$.

Daraus folgt weiter

$6z = 11x - 240$

6) $z = x - 40 + \frac{5x}{6}$.

Man setze $x = 6A$, so wird

7) $z = 11A - 40$ (nach 6.)

Endlich die Werthe von x und z in (1) gesetzt, findet sich

8) $y = 160 - 17A$.

Hier kann nun A nicht unter 4 angenommen werden, weil nach (7) der Werth von z sonst negativ würde.

Wenn daher	$A =$	4,	5,	6,	7 ....
so ist	$x =$	24,	30,	36,	42 ....
	$y =$	92,	75,	58,	41 ....
	$z =$	4,	15,	26,	37 ....

§. 76. **Aufgabe.** Dreissig Personen, Männer, Frauen und Kinder, verzehren in einem Wirthshause zusammen 50 Thlr., wovon ein Mann 3, eine Frau 2 und ein Kind 1 Thlr. bezahlt. Wie viele waren ihrer von jeder Gattung?

Auflösung. Es seien x Männer, y Frauen und z Kinder, so hat man:

$$1)\quad x + y + z = 30.$$

$$2)\quad 3x + 2y + z = 50. \quad \text{Folglich}$$

$$3)\quad 2x + y = 20, \text{ also}$$

$$x = \frac{20-y}{2} = 10 - \frac{y}{2}.$$

Setzt man $y = 2A$, so ist

$x = 10 - A$, mithin

$z = 20 - A$. Nimmt man daher

	$A =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
so ist	$x =$	9,	8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1
	$y =$	2,	4,	6,	8,	10,	12,	14,	16,	18
	$z =$	19,	18,	17,	16,	15,	14,	13,	12,	11.

§. 77. **Zusatz.** Wir finden hier 9 verschiedene, gleich mögliche Auflösungen. Es ereignet sich aber zuweilen, dass bei ähnlichen Aufgaben nur eine einzige Antwort zulässig ist; jedoch darf man sie deshalb nicht unbedingt zu den bestimmten zählen. So giebt z. B. die Aufgabe:

„30 Personen, Männer, Frauen und Kinder, verzehren zusammen 58 Thlr.; ein Mann bezahlt 3 Thlr. 12 Ggr., eine Frau 1 Thlr. 9 Ggr. und ein Kind 6 Ggr. Wie viele Männer etc. waren es?

die Gleichungen: $84x + 33y + 6z = 1392$ (1)

und $x + y + z = 30$ (2)

welche nach Eliminirung von z die Gleichung

$$3)\quad 26x + 9y = 404 \text{ zuwege bringen.}$$

Aus dieser erhält man nun:

$$4)\quad x = 9B + 1$$

$$5)\quad y = 42 - 26B \text{ und}$$

$$6)\quad z = 17B - 13.$$

Aus (5) ergiebt sich, dass B nicht > 1 genommen werden darf und aus (6), dass B nicht < 1 sein kann; daher kann das Resultat nur sein:

10 Männer, 16 Frauen und 4 Kinder.

§. 78. **Aufgabe.** Von 33 Centner (à 100 Pfd.) Pulver sollen 1200 Patronen zu 12-, 8- und 3-Pfündern gefüllt werden. Jede 12pfündige Patrone wird mit 7 Pfd., jede 8pfündige mit 5 Pfd. und jede 3pfündige mit $1\frac{1}{2}$ Pfd. gefüllt. Man fragt, wie viel Patronen von jeder Gattung gefüllt und auf wie vielerlei Weise diess bewerkstelligt werden kann?

Auflösung. Von den 12pfündigen habe man x Patronen
- - 8 - - - y -
- - 3 - - - z -

gefüllt, so entstehen folgende Gleichungen:

$$1)\quad x + y + z = 1200 \text{ und}$$
$$2)\quad 7x + 5y + 1\tfrac{1}{2}z = 3300 \text{ oder}$$
$$14x + 10y + 3z = 6600.$$

Man eliminire nun z, indem man (1) mit 3 mult., so erhält man:

$$3)\quad 3x + 3y + 3z = 3600.$$

Diese Gleichung von (2) abgezogen, giebt:

$$4)\quad 11x + 7y = 3000. \text{ Folglich ist}$$
$$y = \frac{3000 - 11x}{7} = 428 - x + \frac{4 - 4x}{7}$$
$$= 428 - x - \frac{4x - 4}{7}. \text{ Man setze (§. 15. Anmerk.)}$$
$$x - 1 = 7A, \text{ so ist}$$
$$x = 7A + 1, \text{ folglich}$$
$$y = 427 - 11A.$$

Mithin ist $z = 4A + 772$ (nach 1).

Wenn daher	$A =$	0,	1,	2,	3 ....
so ist	$x =$	1,	8,	15,	22 ....
	$y =$	427,	416,	405,	394 ....
	$z =$	772,	776,	780,	784 ....

Da $y = 427 - 11A$, so kann A nicht > 38 genommen werden, woraus folgt, dass insgesammt nur 39 verschiedene Auflösungen möglich sind.

§. 79. Werfen wir einen Blick auf die Resultate der Aufgaben §. 70—78., so finden wir, dass die x-, y- und z-Werthe arithmetische Reihen bilden, welche theils steigend, theils fallend

sind und, sobald nur zwei zunächst auf einander folgende Glieder derselben bekannt sind, die übrigen sehr leicht beliebig weit fortgesetzt werden können. Aber noch ein Umstand verdient hervorgehoben zu werden. Es bleibt nämlich die allgemeine Formel für x und y, die sich aus der Auflösung der Gleichung

$$\text{I.}\quad ax - by = c$$

ergiebt

$$\begin{cases} x = \alpha + bt \\ y = \beta + at, \end{cases}$$

sowie diejenige, welche aus der Gleichung

$$\text{II.}\quad ax + by = c \text{ hervorgeht,}$$

$$\begin{cases} x = \alpha + bt \\ y = \beta - at \end{cases}$$

auch für jede unbestimmte Aufgabe mit drei Unbekannten und zwei Gleichungen bestehen.

So führte die Auflösung der beiden Gleichungen §. 67. zu $5x + 2y = 90$; die von §. 72. zu $x - \frac{1}{2}z = 0$; die von §. 74. auf: $2x - 3z = 120$ u. s. w., so dass daher die Auflösung zweier Gleichungen mit 3 Unbekannten als zurückgeführt auf die von einer Gleichung mit zwei Unbekannten vollgültig betrachtet werden kann*). Wir wollen nun das eben Behauptete näher begründen.

§. 80. **Lehrsatz.** Sind bei drei Unbekannten mit zwei Gleichungen von der Form:

$$\text{I.}\quad ax + by + cz = d$$
$$\text{II.}\quad x + y + z = e$$

ganzzahlige positive Werthe möglich, so liegen dieselben in arithmetischen Progressionen, deren Exponenten folgendermassen bestimmt werden:

1) Die x-Werthe wachsen (oder nehmen ab) um die Differenz der Coefficienten $b - c$) der übrigen Unbekannten.
2) Die y-Werthe nehmen ab (oder wachsen) um die Differenz der Coefficienten ($a - c$) der übrigen beiden Unbekannten.
3) Die Werthe von z nehmen zu um die Differenz der Coefficienten der übrigen Unbekannten ($a - b$).

Beweis. Zieht man die mit c multiplicirte Gleichung (II. von I. ab, so erhält man

---

*) Man sehe hierüber: Erläuterung einer Regel für unbestimmte Aufgaben in einfachen Gleichungen, von Dr. Jacob Struve. Altona 1819. 8.

$$\begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ ex + ey + ez = ee \text{ (wofür wir } f \text{ setzen)} \\ \hline \text{III. } (a-e)x + (b-e)y = d - f. \end{array}$$

Hiernach nehmen nun die x-Werthe um $b-e$ zu, während zugleich die y-Werthe um $a-e$ abnehmen, oder umgekehrt, jene nehmen ab, diese zu. Ist daher α irgend ein Werth für x und β für y, so sind die Reihen

der x-Werthe: $\alpha,\ \alpha \pm (b-e),\ \alpha \pm 2(b-e) \ldots .$

- y-Werthe: $\beta,\ \beta \mp (a-e),\ \beta \mp 2(a-e) \ldots .$

Zieht man ferner die mit b multiplicirte Glg. II. von I. ab, wobei wir be durch g bezeichnen wollen, so ist:

$$\begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ bx + by + bz = g. \\ \hline \text{IV. } (a-b)x + (c-b)z = d-g, \text{ oder:} \\ (a-b)x - (b-c)z = d-g. \end{array}$$

Wenn daher γ irgend ein Werth von z ist, so sieht man aus dieser Gleichung, dass bei dem um $(b-e)$ wachsenden Fortschreiten der x-Werthe, auch die z-Werthe zugleich um $a-b$ zunehmen. Demnach ist die Reihe der z-Werthe:

$$\gamma,\ \gamma + (a-b),\ \gamma + 2(a-b) \ldots .$$

und es können daher für das System von Gleichungen

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ x + y + z = e \end{cases}$$

die allgemeinen Formeln aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} x &= \alpha \pm (b-e)t \\ y &= \beta \mp (a-e)t \\ z &= \gamma \pm (a-b)t. \end{aligned}$$

Sind die beiden ersten Reihen (für x und y) steigend, so muss die dritte fallend sein; denn man kann statt III. auch schreiben:

$$(a-e)x - (e-b)y = d-f,$$

wobei Alles davon abhängt, ob $a-e$ und $b-e$ positiv oder negativ ist.

§. 81. **Zusatz.** So fanden wir z. B. in §. 67.

für $14x + 11y + 9z = 360$

und $x + y + z = 30$.

$x = 16, 14, 12, 10, 8 \ldots$

$y = 5, 10, 15, 20, 25 \ldots$

$z = 9, 6, 3, 0, -3 \ldots$

wo die erste und dritte Reihe abnehmen; allein es können auch diese Werthe nach der entgegengesetzten Seite auftreten, wie in §. 68., allemal bleiben aber die Exponenten der Grösse nach dieselben.

Die vollständige Auflösung obiger Gleichungen ergiebt die allgemeinen Werthe in folgenden Formeln:

$$y = 5 + 5t$$
$$z = 9 - 3t$$
$$x = 16 - 2t$$

wo die Coefficienten der Hülfsgrösse t mit jenen Differenzen zusammenfallen; aus diesen, wenn sie einmal berechnet sind, lässt sich dann leicht bestimmen, ob die einzelnen Reihen zu- oder abnehmen, wenn nur für t solche Werthe genommen werden, dass x, y, z positive ganze Zahlen bleiben. Wir finden übrigens in dem vorigen Lehrsatze ein leichtes Mittel zur Controle der Auflösung solcher Gleichungen.

§. 82. Bisher haben wir immer solche Gleichungen betrachtet, wo die Coefficienten der einen der Einheit gleich sind. Wir wollen nun einige Beispiele betrachten, wo die Coefficienten der Unbekannten in beiden Gleichungen sämmtlich verschiedene Zahlen sind.

Es sei gegeben: 1) $2x + 5y + 3z = 108.$
2) $3x - 2y + 7z = 95.$

Mult. man (1) mit 3 und (2) mit 2, so erhält man:

$$6x + 15y + 9z = 324$$
$$6x - 4y + 14z = 190,$$ beide subtrahirt,

giebt 3) $19y - 5z = 134.$

Hieraus findet sich nun $y = 11 + 5A$ (4)
und 5) $z = 15 + 19A.$

Um nun x zu erhalten, setze man diese Werthe von y und z in eine der gegebenen Gleichungen, z. B. in (2), dann erhält man

$$3x + 123A = 12.$$
3) $$x + 41A = 4,$$ oder
6) $x = 4 - 41A.$

Die Gleichungen 4, 5 und 6 geben uns somit auf einmal die Werthe der Unbekannten, durch die Hülfsgrösse A ausgedrückt, welcher successiv die Werthe 0, 1, 2, 3 .... beigelegt werden können.

Es ist sehr oft der Fall, dass Gleichungen dieser Art keine

Auflösung in ganzen Zahlen gestatten, wie solches eine der abgeleiteten Gleichungen zwischen 2 der Unbekannten zeigt, sobald ihre Coefficienten einen gemeinschaftlichen Factor haben.

Es ist willkührlich, welche von den 3 Unbekannten man aus den Gleichungen eliminirt, indem sich stets dieselben allgemeinen Werthe ergeben.

§. 83. **Aufgabe.** Man soll drei Zahlen bestimmen, deren Eigenschaften durch die Gleichungen angegeben werden:

$$1)\quad 6x+5y+4z = 363$$
$$2)\quad 10x+3y+2z = 231.$$

Auflösung. Man eliminire z. Dann erhält man:

$$3)\quad 6x+5y+4z = 363$$
$$4)\quad \underline{20x+6y+4z = 462}, \text{ folglich}$$
$$5)\quad 14x+\ y=99. \text{ Es ist also}$$
$$y = 99 - 14x \text{ und}$$
$$z = 16x-33.$$

Eliminirt man y, so bekömmt man

$$6)\quad 32x-2z = 66, \text{ oder } 16x-z = 33,$$
daher $z=16x-33$ und
$$y=99-14x, \text{ wie vorhin.}$$

Eliminirt man x aus den gegebenen Gleichungen, so resultirt:

$$7)\quad 8y+7z = 561, \text{ woraus sich ergiebt:}$$
$$x = 7-B$$
$$y = 14B+1$$
$$z = 79-16B.$$

Dass diese letzten allgemeinen Werthe mit den vorigen conform sind, ergiebt sich sogleich, wenn man für $B = 7-x$ setzt. Nimmt man nun

$B = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots$, so ist
$x = 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3\ldots$
$y = 1,\ 15,\ 29,\ 43,\ 57\ldots$
$z = 79,\ 63,\ 47,\ 31,\ 15\ldots$

§. 84. Anmerkung. Der vorige Lehrsatz (§. 80) ist noch einer Erweiterung fähig, indem er sich auch auf zwei solche Gleichungen erstrecken lässt, in denen die Coefficienten sämmtlich beliebige Zahlen sind, wenn sie nur in jeder Gleichung relativ prim erscheinen, sei es auch, dass je zwei von ihnen ein gemeinschaftliches Mass haben. Man kann nämlich, ohne die Gleichungen erst aufzulösen, im Voraus die Exponenten bestimmen, nach welchen

die Werthe der Unbekannten fortschreiten, wie dieses im folgenden Satze dargelegt wird.

§. 85. **Lehrsatz.** Haben die Coefficienten der beiden Gleichungen:

$$ax + by + cz = d$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

Paarweise kein gemeinschaftliches Mass, so schreitet
die Reihe der x-Werthe mit dem Exponenten $b\gamma - c\beta$
„ „ „ y- „ „ „ „ $a\gamma - c\alpha$
„ „ „ z- „ „ „ „ $b\alpha - a\beta$ fort.

Beweis. Man eliminire aus den beiden Gleichungen die Grösse z, so erhält man

$$(a\gamma - c\alpha)x + (b\gamma - c\beta)y = d\gamma - c\delta.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die x-Werthe um den Coefficienten $(b\gamma - c\beta)$ wachsen oder abnehmen, während zugleich die y-Werthe um $a\gamma - c\alpha$ ab- oder zunehmen.

Eliminirt man ferner die Grösse x, so wird:

$(b\alpha - a\beta)y + (c\alpha - a\gamma)z = d\alpha - \delta a$, woraus folgt, dass die z-Werthe den Exponenten $b\alpha - a\beta$ haben. Es versteht sich von selbst, dass die Vorzeichen der Coefficienten dabei nicht ausser Acht gelassen werden dürfen.

§. 86. **Beispiele.** Aus den Gleichungen des §. 82. findet man
den Exponenten der x-Werthe $= 5.7 - (-2.6) = 41.$
„ „ y- „ $= 2.7 - 3.3 = 5.$
„ „ z- „ $= 5.3 - (-2.2) = 19.$

Aus den Gleichungen $4x + 3y + 2z = 100$
$3x + 5y - 2z = 80$ folgt
der Exponent der x-Werthe $= 16$
„ „ „ y- „ $= 14$ und
„ „ „ z- „ $= 11.$

Haben 2 Coefficienten denselben gemeinschaftlichen Factor in jeder der beiden Gleichungen, so hat man die erhaltenen Differenzen mit diesem Factor zu dividiren.

z. B. aus $6x + 5y + 4z = 363$ und
$10x + 3y + 2z = 231$ folgt
der Exponent für die Reihe der x-Werthe $= 2 : 2 = 1$
„ „ „ „ „ „ y- „ $= 28 : 2 = 14$
„ „ „ „ „ „ z- „ $= 32 : 2 = 16.$
(vergl. §. 83.).

§. 87. **Von der Regula Coeci.** Unter diesem Namen ist uns ein sinnreiches Rechnungsverfahren bekannt, welches schon in den ältesten Rechenbüchern enthalten und eine Kategorie von Aufgaben umfasst, welche eigentlich der unbestimmten Analytik angehören. Diese Regel ist mit der regula alligationis verwandt, sobald nämlich drei und mehrere Ingredienzen vermischt werden sollen von einem gegebenen Mittelwerthe. Den Namen „Coeci" hat sie von der grösseren, oft unbeschränkten Anzahl von verschiedenen Auflösungen erhalten, wobei man gleichsam blind wählen, oder zerlegen muss. Wenn aber Busse*) sagt: „Diese Rechnungsregel führt den Namen mit der That, weil ihre Vorschriften ziemlich undeutlich und etwas schwer zu ergründen sind"; so ist diess zu viel behauptet; denn es hat bereits Euler**) die wissenschaftliche Begründung dieser Regel gegeben und durch genügende Beispiele erläutert. Die Regula coeci erstreckt sich auf alle diejenigen Aufgaben, welche in zwei Gleichungen 3 und mehr Unbekannte enthalten.

Da Manchem diese Regel Interesse gewährt, so wollen wir dieselbe hier mit einigen Beispielen darstellen und überlassen es dem jungen Rechner, dieselben algebraisch zu begleiten. Die Erfahrung hat gelehrt, dass Aufgaben dieser Art mit einer gewissen Liebhaberei von Nichtalgebraisten aufgegeben werden, um den Scharfsinn des Rechners zu prüfen.

§. 88. Wie bei allen übrigen Regeln der praktischen Arithmetik eine bestimmte Form des Ansatzes die Rechnung erleichtert und das ganze Verfahren dem Gedächtnisse einprägt, so hat man auch die Regel Coeci in ein bestimmtes Schema gebracht, welches nicht unzweckmässig ist.

Wir gehen nun über zu der vollständigen Vorschrift dieser Regel, wie sie in den älteren ausführlichen Rechenbüchern vorkommt.

Allgemeines Schema zum Ansatze.

	I.		II.		III.
Anzahl der	Personen	Was jede	Person giebt	Wie viel insgesammt die	Personen verzehren
	Masse	„ jedes	Mass gilt		Masse kosten
	Geschlechter		Geschlecht giebt		Geschl. gegeben.

---

*) Erster Unterricht in der Algebraischen Auflösung arithmetischer und geometrischer Aufgaben von F. G. Busse, Prof. d. Mathem. 2r Theil, Dessau 1782.

**) L. Eulers vollständ. Anleit. zur niedern und höheren Algebra. 2r Theil II. Cap. Berlin, 1797.

Man kann hierbei 3 verschiedene Data unterscheiden, wie unter den römischen Zahlen I, II, III angegeben. Hat man nun die Data aus der Aufgabe nach diesem Schema angesetzt, so beobachte man folgende

Regel.

1) Man subtrahire das kleinste Datum (in II.) von jedem grösseren und schreibe die Reste den Minuenden gegenüber.
2) Nun multiplicire man das Datum in I. mit dem kleinsten Datum in II, und setze es unter I.
3) Darauf subtrahire man das Product von dem Datum III.
4) Man dividire, wenn nur ein Rest in II. erscheint, mit demselben den in III. gebliebenen Rest, so erhält man das gesuchte Resultat — und nur in diesem Falle ist die Aufgabe bestimmt.
5) Sind aber 2 Reste in II. vorhanden, so theile man die in III. gebliebene Zahl in zwei solche Theile, dass der erste durch den grössten in II. gebliebenen Rest aufgehe und der zweite durch den kleinsten Rest. Dann hat man eine Auflösung für die Aufgabe gefunden.

   So oft aber diese Zerlegung in 2 andere Theile angeht, ohne gegen die Bedingungen zu verstossen, ebenso oft erhält man eine neue Auflösung.
6) Sind 3 Reste in II. vorhanden, so zerlege man den Rest in III. in 3 solche Theile, dass der erste durch den grössten, der zweite durch den mittleren und der dritte durch den kleinsten der Reste in II. aufgehe. Dabei muss aber die Summe dieser Theile kleiner sein, als die Anzahl der Dinge in I, wo dann der Rest die Anzahl der Dinge vom niedrigsten Werthe bestimmt.
7) Mit derselben Zahl, womit man die Data in II. multiplicirt oder dividirt, muss man auch das Datum in III. multipliciren oder dividiren.

§. 89. Die Regel Coeci gestattet zunächst Anwendung auf bestimmte Aufgaben einer gewissen Classe, wie folgende Beispiele zeigen.

1) 23 Personen, Männer und Frauen, verzehren zusammen 70 Gr. Ein Mann bezahlt 5 Gr. und eine Frau 2 Gr. Wie viele Männer und Frauen waren darunter?

23 Pers.   1 Mann 5 | 3   70 Gr.
2   1 Frau 2 | — 46
46   3) 24
Fac. 8 Männer.

2) Die Zahl 30 soll in 2 verschiedene Theile getheilt werden, so dass, wenn der eine mit 10, der andere mit 15 multiplicirt wird und man beide Producte addirt, die Summe = 390 sei.

30   Factor   390
× 10   15 | 5   — 300
300.   10 | 5) 90
Fac. 18.

3) Ein Goldarbeiter hat zweierlei Gold: 23- und 18 karätiges und braucht 20 karätiges; wie viel wird er von jeder Sorte nehmen müssen?

1 Mark   23 | 5   20
× 18   18 | — 18
18   5) 2
Fac. $\frac{2}{5}$.

Er nimmt also $\frac{2}{5}$ Mark 23 karätiges
und $\frac{3}{5}$ Mark 18 karätiges Gold.

§. 90. **Aufgabe** 1. Zwanzig Personen, Männer, Frauen und Jungfrauen, verzehren zusammen 3 ₰. Dazu hat jeder Mann 8 Gr., jede Frau 4 Gr. und jede Jungfrau 2 Gr. gegeben. Wie viele Männer, Frauen und Jungfrauen sind darunter?

20 Pers.   1 Mann 8 | 6   72
2   1 Frau 4 | 2   — 40
40   1 Jungfr. 2 | 32
$\overline{} + \overline{}$
6   2

$\frac{30}{6} + \frac{2}{2} = 5 + 1 =$ { 5 Männer, 1 Frau, 14 Jungfr.

Oder

$\frac{24}{6} + \frac{8}{2}$ d. i. { 4 Männer, 4 Frauen, 12 Jungfr. u. s. w.

Aufgabe 2. Jemand will für 50 fl. 50 Ellen von dreierlei Waaren haben, nämlich schwarzes Tuch, die Elle zu 2 fl., blaues à 1½ fl. und grünes à ½ fl. Wie viel Ellen muss er von jeder Sorte nehmen?

		2 ⌣			
50 Ellen	schwarzes	2	4	3	50 Ellen
	blaues	1½	3	2	100 (2
	grünes	½	1		— 50
					50.

Diesen Rest 50 theile man nun in zwei Theile, davon der erste durch 3, und der zweite durch 2 aufgeht.

z. B. $\frac{24}{3} + \frac{26}{2}$, oder $\frac{30}{3} + \frac{20}{2}$, oder $\frac{48}{3} + \frac{2}{2}$ d. i.
8 und 13 10 und 10 16 und 1 etc.

Also kann er nehmen: 8 Ell. schwarz. à 2 fl. = 16 fl.
13 „ blau à 1½ „ = 19½ „
29 „ grün à ½ „ = 14½ „
50 Ell. 50 fl. u. s. w.

Aufgabe 3. Ein Kaufmann hat 3 Sorten Taback, zusammen 180 Pfd. Das Pfd. der besten Sorte will er zu 6 ß, der mittleren zu 4 ß und der schlechtesten zu ½ ß verkaufen. Wie viel Pfd. muss er von jeder Sorte verkaufen, um daraus 180 ß zu lösen?

	2 ⌣			
180 Pfd.	6	12	11	180
1	4	8	7	2
180	½	1		360
				— 180
				— + —
				11 7

Da 110 + 70 = 180, so erhält man
10 Pfd. à 6 ß = 60 ß
10 „ à 4 „ = 40 „
160 „ à ½ „ = 80 „
180 ß

Aufgabe 4. Jemand will eine Summe von 40 ß mit Thalerstücken, Acht-, Vier- und Zweigroschenstücken bezahlen und zwar mit 119 Geldstücken. In welcher Weise wird er die Bezahlung ausführen können?

$$\text{119 Stück}\left\{\begin{array}{r|r|r} 24 & 22 & 11 \\ 8 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & & \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r} 40 \text{ ₰} \\ 24 \\ \hline 960 \text{ Gr.} \\ 2)\overline{\quad\quad} \\ 480 \\ -119 \\ \hline 361. \end{array}$$

Die Zerlegung von 361 kann auf folgende Arten geschehen:

$\frac{330}{11} + \frac{30}{3} + \frac{1}{1}$ oder 30, 10, 1

$\frac{352}{11} + \frac{6}{3} + \frac{3}{1}$ oder 32, 2, 3

wobei alsdann für die Zweigroschenstücke erhalten werden:

$$119-(30+10+1) = 78$$
$$119-(32+2+3) = 82.$$

Probe.

30 Thaler	= 30 ₰		
10 Achtgr.	= 3 „	8 Gr.	
1 Viergr.	= — „	4 „	
78 Zweigr.	= 6 „	12 „	
119 Stück	= 40 ₰.		

Aufgabe 5. Eine Köchin hat 76 Stück Geflügel für 23 ₰ 17 Sgr gekauft und zwar Gänse, Hühner, Enten und Tauben; sie hat für die Gans 20, für das Huhn $10\frac{1}{2}$, für die Ente 7 und für die Taube 4 Sgr gegeben. Wie viel Stück kann sie von jeder Gattung gekauft haben?

$$\begin{array}{r} 76 \\ 8 \\ \hline 608 \end{array} \qquad \begin{array}{lr|r|r} & & 2 & \\ \text{Gans} & 20 & 40 & 32 \\ \text{Huhn} & 10\frac{1}{2} & 21 & 13 \\ \text{Ente} & 7 & 14 & 6 \\ \text{Taube} & 4 & 8 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 707 \text{ Sgr} \\ \overline{\quad\quad}(2 \\ 1414 \\ -608 \\ \hline 806 \\ \overbrace{\frac{}{32}+\frac{}{13}+\frac{}{6}} \end{array}$$

Nimmt man

$806 = 480 + 260 + 66$, so erhält man:

$$\frac{480}{32} + \frac{260}{13} + \frac{66}{6} = 15 + 20 + 11 = 46,$$

mithin bleibt für die Tauben 76—46 d. i. 30 übrig.

Man hat nun	15 Gänse	à 20 Sgr	= 300
	20 Hühner	à $10\frac{1}{2}$ „	= 210
	11 Enten	à 7 „	= 77
	30 Tauben	à 4 „	= 120
	76.		707.

Nimmt man

$$806 = 640 + 130 + 36, \text{ also}$$

$$\frac{640}{32} + \frac{130}{13} + \frac{36}{6} = 20 + 10 + 6 = 36,$$

daher für die Tauben 76 — 36 = 40. u. s. w.

§. 91. Die Regel Coeci kann auch vortheilhaft auf die Vermischungsrechnung angewandt werden, besonders wenn es sich um mehrere verschiedene Auflösungen handelt.

Aufgabe 6. Es sollen dreierlei Arten Gewürz so mit einander gemischt werden, dass das Pfund 12 Gr. koste. Es kostet aber das Pfund von der ersten Art 18 Gr., von der zweiten 16 Gr. und von der dritten 6 Gr. Wie viel hat man von jeder Art zu nehmen?

Man nehme an, es sollten 100 Pfd. à 12 Gr. hergestellt werden, dann hat man folgenden Ansatz:

100 Pfd.	18	12	1200
6	16	10	— 600
600	6		600

Man findet nun $\frac{480}{12} + \frac{120}{10}$

d. h. 40 und 12, sowie 100 — (40 + 12) = 48.

Daher nimmt man

40 Pfd.	à 18 Ggr.	=	30 Thlr.
12 -	à 16 -	=	8 -
48 -	à 6 -	=	12 -
100 Pfd.			50 Thlr. oder 1200 Ggr.

Oder man zerlegt 600 in $\frac{360}{12} + \frac{240}{10}$ d. i. 30, 24 und für die 3te Sorte 100 — 54 = 46 u. s. w.

Aufgabe 7. Jemand hat dreierlei Silber, $7\frac{1}{2}$-, 11- und 15löthiges und will ein Werk von 50 Mark 13löthig machen, jedoch von jeder Art Silber lauter ganze Mark dazu nehmen. Wie viel ist dazu von jeder Art zu nehmen?

		2		
	15	30	15	50 Mark à 13 Loth.
$\frac{50}{750}$(15	11	22	7	650 Loth
	$7\frac{1}{2}$	15		——(2

1300
— 750
———
550

$\underbrace{\quad 550 \quad}_{\frac{}{15} + \frac{}{7}}$

Zerlegt man 550 in 480 und 70,
so erhält man $\frac{480}{15} + \frac{70}{7}$
$= 32 + 10$, folglich
$50 - (32 + 10) = 8$.

Man nimmt also 32 Mark $7\frac{1}{2}$ löthiges Silber
10 „ 11 „ „
und 8 „ 15 „ „

Eine andere Zerlegung ist hier unstatthaft.

Es bleibt bei dieser Regel noch manche Schwierigkeit in Betreff der Zerlegung des Restes (in III.), welche meistens auf eine unbestimmte Gleichung von der Form $ax = by + c$ hinausläuft, wofür einige Autoren älterer Rechenbücher die Methode des Bachet de Meziriak anführen, welche der Auflösung vermittelst der Kettenbrüche ähnlich und welche auch von Euler in dessen Algebra erklärt worden ist.

§. 92. Sehr richtig bemerkt schon Vega*): „Es giebt Aufgaben, welche bestimmt zu sein scheinen, und doch wirklich unbestimmt sind; z. B. drei Zahlen zu finden, wo die Summe der ersten und zweiten = 40, die Summe der zweiten und dritten = 100, und die Differenz der dritten und ersten = 60 sei. Benennt man die drei Zahlen mit x, y, z, so ist laut Beding.

$$x + y = 40$$
$$y + z = 100$$
$$z - x = 60,$$

wo es scheint, dass die Aufgabe bestimmt sei, weil ebenso viele Gleichungen als unbekannte Grössen vorhanden sind. Allein die letzte Bedingung zeigt keine neue Eigenschaft der unbekannten Grössen an, sondern wiederholt nur dasjenige, was die zwei ersten Bedingungen ausgedrückt haben; denn man darf nur die erste Gleichung von der zweiten abziehen, so hat man die dritte; folg-

*) Vorlesungen über die Mathematik. 1r Band. 3te Aufl. Wien, 1802.

lich ist diese Aufgabe unbestimmt und man findet die Werthe der unbekannten Grössen

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \ldots\ldots 39$$
$$y = 39,\ 38,\ 37,\ 36,\ 35 \ldots\ldots 1$$
$$z = 61,\ 62,\ 63,\ 64,\ 65 \ldots\ldots 99.“$$

Wir fügen diesem Beispiele, weil es für den Anfänger nützlich ist, an die Unabhängigkeit der Gleichungen zu erinnern, noch folgende hinzu.

§. 93. **Aufgabe.** Die Summe dreier Zahlen ist = 50; subtrahirt man von dem Dreifachen der ersten Zahl das Doppelte der zweiten, so bleibt 28 übrig; addirt man zum 22fachen der ersten Zahl das 7fache der dritten, so übertrifft diese Summe das Dreifache der zweiten Zahl um 490. Wie heissen die drei Zahlen?

Auflösung. Sind die gesuchten Zahlen x, y, z, so erhält man folgende Gleichungen:

$$1)\quad x + y + z = 50$$
$$2)\quad 3x - 2y = 28$$
$$3)\quad 22x + 7z = 3y + 490, \text{ geordnet:}$$
$$\text{I.}\quad x + y + z = 50$$
$$\text{II.}\quad 3x - 2y = 28$$
$$\text{III.}\quad 22x - 3y + 7z = 490.$$

Mult. man nun I. mit 7, so wird

$$\text{IV.}\quad 7x + 7y + 7z = 350.$$

Zieht man die Gl. IV. von III. ab, so bleibt

$$\text{V.}\quad 15x - 10y = 140 \text{ und, mit 5 dividirt:}$$
$$\text{VI.}\quad 3x - 2y = 28,$$

womit man wieder auf die Gleich. II. zurückgekommen ist.

Die dritte Beding. kann also füglich wegfallen und dann folgt aus den beiden ersten unabhängigen Gleichungen, wenn die erste mit 2 mult. und zu der zweiten addirt wird:

$$5x + 2z = 128.$$

Ebenso gut kann aber auch die zweite Gleichung wegfallen, wo dann (I) mit 3 mult. und zu III. addirt, wiederum dieselbe Gleichung $5x + 2z = 128$ entsteht.

§. 94. Von gleicher Beschaffenheit ist die Aufgabe Nr. 33. in Meier Hirsch's Beispielsammlung S. 134, wo folgende drei Gleichungen gegeben sind:

$$1)\quad \frac{2x + 3y}{x + y} = 2\tfrac{1}{5}$$

2) $\frac{x+z}{5(x-z)} = \frac{1}{3}$

3) $\frac{10x-3z}{4x-2z} = 2\frac{9}{14}$.

Hier reducirt sich die erste Gleichung auf

(A) $4y = x$; die zweite auf

(B) $4z = x$ und die dritte auf

(C) $4z = x$. Es ist also $y = z$ und

für $y = 2,\ 4 \ldots.$

ist $z = 2,\ 4 \ldots.$

$x = 8,\ 16 \ldots.$

Es sind also nur zwei unabhängige Gleichungen für die Bestimmung der 3 Unbekannten gegeben.

Unger*) behandelt in seiner Algebra S. 318 eine Aufgabe mit drei Unbekannten, zu deren Auflösung folgende drei Gleichungen gegeben sind:

1) $3x - 2y + 5z = 55$ (A)

2) $23x - 46y + 21z = 3$ (B)

3) $9y - 2x + z = 68$ (C).

In der Leipziger Lit.-Zeit. Nr. 233. 1831. bemerkt der Rec. hierbei Folgendes:

„Da man hier, nachdem zwei der Unbekannten eliminirt worden, eine identische Gleichung erhält, so schliesst Unger mit Recht, dass eine dieser 3 Gleichungen von den beiden übrigen abhängen müsse. Der Verf. will indessen bei genauerer Untersuchung gefunden haben, dass die von den beiden andern abhängige Gleichung gerade die zweite sei, da man doch offenbar dieses mit gleichem Rechte von der ersten und von der dritten behaupten kann. Freilich entsteht die zweite Gleichung, wenn man von dem 5fachen Producte der ersten das 4fache der dritten abzieht. Aber wenn

$5A - 4C = B$, so ist auch

$\frac{1}{5}B + \frac{4}{5}C = A$, und

$\frac{5}{4}A - \frac{1}{4}B = C$.“

Wir sehen hieraus, wie vorsichtig man zu Werke gehen muss, wenn man die Unabhängigkeit vorgelegter Gleichungen prüfen will.

*) Die Algebra für Geschäftsleute, oder Anleit. z. Algebra u. zu ihrer Anwend. auf d. wichtigsten Gegenst. des prakt. Lebens von Dr. E. S. Unger. Leipzig 1828.

§. 95. Es ist nicht leicht, ohne die gegebenen Gleichungen erst aufzulösen, schon im Voraus zu beurtheilen, ob man positive ganze Zahlen für die Unbekannten erhalten werde, oder mit anderen Worten, ob die Auflösung möglich oder unmöglich sei? Für den Fall, wo die beiden Gleichungen von der Form sind:

$$x + y + z = m$$

$$ax + by + cz = n,$$ ist diess nicht schwer und da die Aufgaben der Regel Coeci meistens auf diese Gleichungen führen, so kann man bald beurtheilen, ob eine derartige Aufgabe möglich sei, oder nicht.

Es sei $a > b$ und $a > c$, so ist auch

$ax + ay + az > n$. Da nun

$ax + ay + az = am$, so muss

$am > n$ sein.

Es sei ferner $c < b$ und $c < a$, so ist

$cx + cy + cz < n$, und da

$cx + cy + cz = cm$, so muss auch

$cm < n$ sein.

Wenn demnach n nicht $> mc$ und $< ma$, d. h. wenn n nicht innerhalb der Grenzen mc und ma liegt, so ist die Auflösung unmöglich. Man würde sich aber oft irren, wenn man umgekehrt schliessen wollte: n liegt zwischen den Grenzen mc und ma, also ist die Auflösung möglich; denn liegt z. B. n einer dieser Grenzen sehr nahe, so kann die Auflösung dennoch unmöglich sein. Diess erinnert uns an die bekannte Prüfung in der Feldmesskunst, wo z. B. die 4 gemessenen Eckwinkel eines Vierecks nothwendig $4R$ betragen müssen. Findet dieses nicht statt, so ist ein Messungsfehler gewiss; doch kann hier nicht umgekehrt geschlossen werden.

Wären z. B. die Gleichungen gegeben:

$$x + y + z = 100$$

$$21x + 8y + 3z = 360,$$

so würde man, obgleich n, d. i. 360, zwischen den Grenzen 2100 und 300 liegt, dennoch finden, dass ihre Auflösung unmöglich sei.

III. Capitel.

Von der Auflösung solcher Aufgaben, welche vier Unbekannte enthalten, wozu drei unabhängige Gleichungen gegeben sind.

§. 96. Aus drei verschiedenen Gleichungen mit vier Unbekannten lassen sich jedesmal zwei von ihnen eliminiren, wodurch dieses System von Gleichungen sich auf eine Gleichung mit 2 Unbekannten zurückführen lässt. Es können dabei besondere Fälle eintreten, wo die einzelnen Gleichungen nicht alle 4 Unbekannten enthalten, sondern nur deren zwei oder drei in allen möglichen Combinationen. Wir wollen zu diesem Ende, wie früher, einige Aufgaben als Beispiele vornehmen.

§. 97. **Aufgabe.** Vier Zahlen zu bestimmen, deren Eigenschaften durch folgende Gleichungen angegeben werden:

$$(1)\quad 2u + 4x + 3y = 40$$
$$(2)\quad 6u + 2x - 5z = 16$$
$$(3)\quad 5u - 3y + 2z = 15.$$

Auflösung. Man ziehe die Gleichung (2) von (1) ab, so erhält man (4) $-4u + 2x + 3y + 5z = 24$.
Ferner (3) von (2) subtrahirt, giebt

$$(5)\quad u + 2x + 3y - 7z = 1.$$ Diese von (4) ab, giebt (6) $-5u + 12z = 23$. Folglich ist

$$(7)\quad u = 2z - 4 + \frac{2z-3}{5}.$$

Man setze $2z - 3 = 5A$, so ist

$$(8)\quad z = \frac{5A+3}{2} = 2A + 1 + \frac{A+1}{2}.$$

Ferner sei $A + 1 = 2B$, so ist

$$(9)\quad A = 2B - 1.$$ Daher

$$(10)\quad z = 5B - 1 \text{ (nach 8 u. 9).}$$

Es ist also (11) $u = 12B - 7$ (nach 7 u. 10).

Hieraus folgt (12) $y = \frac{70B - 52}{3}$ (nach (3), 10 u. 11)

und (13) $x = \frac{53 - 47B}{2}$.

Hiernach kann B nicht $= 0$ und nicht > 1 sein. Nimmt man daher

$B = 1$, so findet sich
$x = 3$ nach (13)
$y = 6$ - (12)
$u = 5$ - (11)
$z = 4$ - (10)

und sind andere Resultate für die Unbekannten unmöglich.

§. 98. **Aufgabe.** Welche Zahlen lassen durch 5, 6, 7, 8 dividirt, nach der Reihe die Reste 3, 1, 0, 5?

Auflösung. Man erhält offenbar folgende Gleichungen:

$$5x+3 = 6y+1 = 7z = 8t+5.$$

Aus den beiden ersten folgt:

$$x = y + \frac{y-2}{5}.$$

Sei $y - 2 = 5A$, so ist
$y = 5A + 2$, folglich
$6y + 1 = 30A + 13 = 7z$. Daraus folgt:

$$z = 4A + 1 + \frac{2A+6}{7}.$$

Sei $2A + 6 = 7B$, so ist

$$A = \frac{7B-6}{2} = 3B - 3 + \frac{B}{2}.$$

Ferner sei $B = 2C$, so ist
$A = 7C - 3$, daher

$$z = 28C - 12 + 1 + \frac{14C-6+6}{7}$$

oder $z = 30C - 11$. Es ist also
$7z = 210C - 77 = 8t + 5$. Daraus findet sich

$$t = \frac{210C-82}{8} = 26C - 10 + \frac{C-1}{4}.$$

Setzt man $C - 1 = 4D$, so ist
$C = 4D + 1$, folglich
$t = 105D + 16$, mithin ist die gesuchte Zahl
$N = 8t + 5 = 840D + 133$.

Nimmt man daher

$D = 0, \; 1, \; 2 \ldots$ so ist
$N = 133, \; 973, \; 1813 \ldots$

§. 99. **Aufgabe.** Zwei Fabrikanten A und B haben verschiedene Sorten Uhren. A hat u von einer Sorte, x von der

anderen, z von der dritten. B hat y von einer Sorte, die er das Stück zu 7 Thlr. verkauft. Verkauft A den Vorrath der ersten Sorte zu 3 Thlr., und die der zweiten zu 5 Thlr., so löst er aus seinem Vorrathe dieser beiden Sorten 155 Thlr. Setzt er den Preis der ersten Sorte auf 5 Thlr., so muss ihm B auf den Vorrath seiner Sorte 179 Thlr. zugeben. Verkauft aber A seine erstere Sorte zu 4 Thlr., und die dritte Sorte zu 7 Thlr., so bekommt er für beide 174 Thlr. Wie gross war die Anzahl aller vier Sorten Uhren?

Auflösung. Den Bedingungen dieser Aufgabe gemäss, erhält man folgende drei Gleichungen:

$$(1) \quad 3u + 5x = 155$$
$$(2) \quad 5u - 7y = 179$$
$$(3) \quad 4u + 7z = 174.$$

Da nun jede Gleichung nur 2 Unbekannte enthält, so würde eine Eliminirung überflüssig sein.

Aus (1) folgt $u = \frac{155 - 5x}{3} = 51 - x - \frac{2x - 2}{3}$.

Es sei $2x - 2 = 3A$, so ist

$$x = A + 1 + \frac{A}{2}.$$

Sei ferner $A = 2B$, so folgt

$$x = 3B + 1 \text{ und}$$
$$u = 50 - 5B.$$

Substituirt man den Werth von u in (2) und (3), so ergiebt sich

$$y = \frac{71 - 25B}{7} \text{ und}$$

$$z = \frac{20B - 26}{7}.$$

Ohne die Bruchwerthe von y und z weiter zu entwickeln, ist klar, dass in der letzten Form $B > 1$ sein muss. Nimmt man also $B = 2$, so wird $z = 2$, $y = 3$, $u = 40$ und $x = 7$.

Es kann aber auch im Ausdrucke für y das B nicht > 2 genommen werden; daraus folgt, dass diese Aufgabe nur eine Auflösung zulässt.

§. 100. **Aufgabe.** Vier Knaben A, B, C, D suchen Haselnüsse und finden, dass der eine mehr gepflückt hat, als der andere. Sie entschliessen sich daher zur Mittheilung, doch so, dass der, welcher die meisten hat, jedem der übrigen so viele

geben soll, als er eben hat. Nachdem diess jeder gethan, finden sich die Nüsse gleich getheilt. Wie viele hatte jeder anfänglich gehabt?

Auflösung. A habe u, B x, C y und D z Nüsse gepflückt; ferner habe A die meisten und theilte daher zuerst mit, dann B, C und D, so dass nach Mittheilung des D alle gleich viel besitzen.

Um nun leicht möglichen Irrthümern vorzubeugen, ordne man die ganze Rechnung in tabellarischer Form folgendermassen:

Knaben	Anzahl der Nüsse	Zustand nach Mittheilung des A	Zustand nach Mittheilung des B.	Zustand nach Mittheilung des C.	Zustand nach Mittheilung des D.
A	u	$u-x-y-z$	$2u-2x-2y-2z$	$4u-4x-4y-4z$	$8u-8x-8y-8z$
B	x	$2x$	$3x-u-y-z$	$6x-2u-2y-2z$	$12x-4u-4y-4z$
C	y	$2y$	$4y$	$7y-u-x-z$	$14y-2u-2x-2z$
D	z	$2z$	$4z$	$8z$	$15z-u-x-y$

Man erhält demnach folgende 3 Gleichungen:

(1) $8u-8x-8y-8z = 12x-4u-4y-4z$

(2) $8u-8x-8y-8z = 14y-2u-2x-2z$

(3) $8u-8x-8y-8z = 15z-u-x-y$.

Aus (1) folgt:

(4) $3u-5x-y-z = 0$. Aus (2) folgt:

(5) $5u-3x-11y-3z = 0$. Aus (3) entsteht:

(6) $9u-7x-7y-23z = 0$.

Eliminirt man aus diesen 3 letzten Gleichungen x und u, so erhält man:

(7) $5y = 9z$, folglich $y = 9A$

und $z = 5A$;

also $u = 33A$ und $x = 17A$.

Wenn daher $A = 1, 2, 3 \ldots$ so ist

$z = 5, 10, 15 \ldots$

$y = 9, 18, 27 \ldots$

$x = 17, 34, 51 \ldots$

$u = 33, 66, 99 \ldots$

§. 101. Wären 4 Gleichungen mit 5 Unbekannten gegeben, so würde man diesen Fall leicht auf den vorigen (3 Gleichungen

mit 4 Unbekannten) zurückführen können durch die Eliminirung einer Unbekannten.

Es seien z. B. gegeben:

$$1)\ a_{,}x + b_{,}y + c_{,}z + d_{,}u + e_{,}v = f_{,}$$
$$2)\ a_{,,}x + b_{,,}y + c_{,,}z + d_{,,}u + e_{,,}v = f_{,,}$$
$$3)\ a_{,,,}x + b_{,,,}y + c_{,,,}z + d_{,,,}u + e_{,,,}v = f_{,,,}$$
$$4)\ a_{IV}x + b_{IV}y + c_{IV}z + d_{IV}u + e_{IV}v = f_{IV},$$

dann wird man aus diesem Systeme von Gleichungen eine Unbekannte, z. B. x, auf folgende Art eliminiren.

Man multiplicirt (1) mit $a_{,,}$ und (2) mit $a_{,}$, dadurch erhält man zwei neue Gleichungen (5) und (6). Diese geben von einander subtrahirt eine neue Gleichung (7), welche nun kein x mehr enthält. Ebenso eliminire man x aus (1) und (3); dadurch entstehen die neuen Gleichungen (8) und (9), und durch deren Subtraction wieder eine (10) ohne x. Eliminirt man endlich aus (1) und (4) die Grösse x, so entstehen die Gleichungen (11) und (12), welche subtrahirt eine Gleichung (13) geben, in der kein x enthalten ist. Hierdurch hat man nun die drei Gleichungen (7), (10) und (13) erhalten mit 4 Unbekannten, und somit dieses System auf das vorige einfachere zurückgeführt.

Sind nun allgemein $n-1$ Gleichungen mit n Unbekannten gegeben, um daraus ganze positive Zahlen für die gesuchten Grössen zu finden, so beobachte man das eben angedeutete Verfahren der Elimination so vieler Unbekannter, dass zuletzt nur noch eine Gleichung mit zwei Unbekannten übrig bleibt.

Es treten dabei manche Abkürzungen ein, je nachdem die einzelnen Gleichungen sämmtliche, oder nur einige der unbekannten Grössen enthalten.

Eine der einfachsten hierher gehörigen Aufgaben ist z. B. folgende: Man sucht eine Zahl N von der Beschaffenheit, dass sie

durch 5 getheilt zum Reste 2 bleiben
" 6 " " " 3 "
" 7 " " " 4 "
" 8 " " " 5 "
" 9 " " " 0 "

wozu die Gleichungen entstehen:

$$\frac{N}{5} = x + \tfrac{2}{5} \text{ oder } N = 5x + 2$$
$$\frac{N}{6} = y + \tfrac{3}{6} \qquad N = 6y + 3$$
$$\frac{N}{7} = z + \tfrac{4}{7} \qquad N = 7z + 4$$
$$\frac{N}{8} = u + \tfrac{5}{8} \qquad N = 8u + 5$$
$$\frac{N}{9} = t \qquad N = 9t$$

Die Auflösung geschieht nun ebenso, wie bei den obigen ähnlichen Aufgaben.

§. 102. Wir sehen also wiederum, dass bei der Auflösung einer Aufgabe mit n Unbekannten und $n-1$ Gleichungen zuletzt Alles auf eine Gleichung mit zwei Unbekannten hinausläuft. Man kann daher gewissermassen die Regel für die Auflösung der Gleichung

$$ax \mp by = c$$

als das Factotum der Diophantischen Aufgaben des ersten Grades betrachten.

Schon im 1. Cap. §. 10 und 11. ward darauf hingewiesen, dass die Grösse $\frac{ax \mp c}{b}$ und x jedesmal zu einer ganzen Zahl gemacht werden könne, sobald a und b relative Primzahlen sind. Da es nun überhaupt noch problematisch bleibt, ob diess ohne weitere Bedingungen immer möglich ist und zugleich davon die Möglichkeit der Auflösung $ax \mp by = c$ abhängt; so möge hier am Schlusse dieses Capitels ein strenger Beweis jenes Satzes folgen. Aus der Lehre vom Masse der Zahlen müssen wir aber folgende Sätze als Prämissen voraussetzen (deren Beweise man in jedem vollständigen Lehrbuche der Arithmetik nachlesen kann).

1) Ist eine Zahl p prim zu zwei anderen a und b, so ist sie auch prim zu deren Producte ab.
2) Ist a prim zu p und es ist $b < p$, so ist das Product ab durch p nicht theilbar.

§. 103. **Lehrsatz.** Sind a und b relative Primzahlen und wird jedes Glied der Reihe

$$b,\ 2b,\ 3b,\ 4b\ \ldots\ldots\ (a-1)b$$

durch a getheilt, so erhält man lauter verschiedene positive Reste.

Beweis. Nehmen wir z. B. die Zahlen 3 und 7, so giebt

die Reihe 3, 6, 9, 12, 15, 18 mit 7 divid.

die Reste 3, 6, 2, 5, 1, 4, welche sämmtlich verschieden sind.

Nehmen wir nun an, dass irgend zwei dieser Glieder, durch a getheilt, denselben Rest liessen, so können diese dargestellt werden durch xb und yb, und ihr gemeinschaftlicher Rest sei r, so dass $xb = na + r$ und $yb = ma + r$; dann ist klar, dass $xb - yb = na - ma$ durch a theilbar ist. Diess ist jedoch unmöglich, weil

$$xb - yb = b \times (x - y),$$

in welchem Producte der Factor b prim zu a ist und $(x - y) < a$, indem x, wie $y < a$ sind (e. h.), demnach muss es auch ihre Differenz sein (Präm. 2.). Folglich kann $b \times (x - y)$ durch a nicht theilbar sein, und kann also $xb = na + r$ neben $yb = ma + r$ unmöglich zugleich bestehen, d. i. nicht zwei von jenen Gliedern können denselben Rest lassen, wenn sie durch a getheilt werden.

§. 104. **Zusatz** 1. Da nun die Reste, welche durch die Division aller Glieder der Reihe

$$b,\ 2b,\ 3b,\ \ldots\ldots\ (a-1)\,b$$

mit a entstehen, sämmtlich verschieden, und also auch nothwendig $< a$ sind; so folgt, dass alle Zahlen von 1 bis $a - 1$ unter ihnen vorkommen.

Es ist klar, dass unter den obigen Gliedern eins auftreten muss, welches den Rest 1 giebt; es muss daher auch eine Zahl $x < a$ von der Art geben, dass $bx - 1$ durch a theilbar ist, oder, was einerlei, die Gleichung $bx - 1 = ay$, oder $bx - ay = 1$, ist stets auflösbar, sobald a und b prim zu einander sind; sie ist dagegen unmöglich, falls a und b einen gemeinschaftlichen Theiler haben, indem dann die eine Seite der Gleichung durch denselben theilbar wäre, welches bei der andern (1) nicht angeht. Dasselbe gilt aber auch von der Gleichung $bx - ay = -1$, da $a - 1$ einer von den Resten der obigen Reihe ist, so dass wieder ein Werth von $x < a$ gefunden werden kann, damit $bx - (a - 1)$ durch a theilbar werde; d. h. die Gleichung $bx - ay = a - 1$, oder was einerlei: $bx - a(y - 1) = -1$, ist allemal möglich. Denn setzt man $y - 1 = y_1$, so muss $bx - ay_1 = -1$ ganzzahlige Werthe für die Unbekannten geben.

Somit ist also die Auflösbarkeit der Gleichung

$$ax - by = \pm 1$$

nachgewiesen.

Zusatz 2. Da die Gleichung $ax - by = \pm 1$ immer auflösbar ist, wenn a und b prim zu einander sind, so folgt, dass es auch die Gleichung $ax - by = \pm c$ sein müsse. Denn multiplicirt man beide Seiten der Gleichung

$ax - by = \pm 1$ mit c, so erhält man

$acx - bcy = \pm c$, oder, wenn man

$cx = x_,$ und $cy = y_,$ setzt:

$ax_, - by_, = \pm c$, so dass offenbar dasselbe Resultat erscheint, wenn $a(x_, \pm bt)$ statt $ax_,$ und $b(y_, \pm at)$ statt $by_,$ geschrieben wird, wo dann

$$a(x_, \pm bt) - b(y_, \pm at) = \pm c \text{ ist.}$$

Setzt man wiederum $x_, \pm bt = x$ und $y_, \pm at = y$, so entsteht die Gleichung $ax - by = \pm c$, welche demnach jederzeit in ganzen Zahlen möglich ist.

§. 105. **Lehrsatz.** Die Gleichung $ax + by = c$ ist immer möglich, wenn a und b relative Primzahlen sind, und $c > (ab - a - b)$ ist.

Beweis. Denn es sei $c = (ab - a - b) + r$, so hat man die Gleichung

$$ax + by = (ab - a - b) + r.$$

Ihre Auflösbarkeit hängt also davon ab, dass

$$x = \frac{ab - a - b - by + r}{a},$$

oder $x = b - 1 - \frac{(y+1)b - r}{a}$ eine ganze Zahl sei; es hängt daher alles davon ab, dass

$\frac{(y+1)b - r}{a}$ zur ganzen Zahl $= x_,$ werde, oder, wenn man $y + 1 = y_,$ setzt, dass die Gleichung $y_,b - ax_, = r$ lösbar sei, welches, wie wir im vorigen §. gesehen haben, allemal der Fall ist, sofern nur $y_,$ oder $y + 1 < a$ ist.

Da nun in der Gleichung

$\frac{(y+1)b - r}{a} = x_,$ die Grösse $y + 1 < a$, so muss auch $x_, < b$, also

$x = b - 1 - \frac{(y+1)b - r}{a} = b - 1 - x_,$ sein und wird so-

nach auch $x = b - 1 - s$, entweder 0 oder irgend eine ganze Zahl geben.

Demnach kann die Gleichung

$$ax + by = c$$

jederzeit durch ganze Zahlenwerthe für x und y befriedigt werden, sobald nur die obigen Bedingungen bestehen.

§. 106. **Zusatz.** Vermittelst der vorigen Sätze können wir auf eine leichte Weise beurtheilen, ob eine vorgelegte Gleichung dieser Art möglich oder unmöglich ist. So ist z. B. die Gleichung $7x + 13y = 71$ unmöglich, weil $7 . 13 - 7 - 13 = 71$ ist; ebenso ist $13x + 17y = 100$ unauflösbar, indem auch hier nicht $100 > 13 . 17 - 13 - 17$. Dagegen ist bei der Gleichung $7x + 11y = 100$ eine Auflösung möglich, da $100 > 7 . 11 - (18)$ und die Coefficienten relativ prim sind.

IV. Capitel.

Von der Auflösung unbestimmter Aufgaben mit drei Unbekannten, zu deren Auflösung nur Eine Gleichung gegeben wird.

§. 107. Enthält eine Aufgabe 3 unbekannte Grössen, und bietet sie nur eine Gleichung dar, so sieht man sich genöthigt, eine von ihnen willkührlich anzunehmen, doch so, dass dabei die Bedingungen der Aufgabe nicht verletzt werden. Die allgemeine Form einer solchen Gleichung ist:

$$ax + by + cz = d.$$

Gemeiniglich giebt man ihr die Form

$$ax + by = d - cz$$

und untersucht zunächst, welche Werthe für z angenommen werden können. Durch Substitution eines solchen Werthes von z in die Gleichung, reducirt sich dieselbe auf eine Gleichung mit 2 Unbekannten $ax + by = f$, durch deren weitere Auflösung dann die zugehörigen Werthe von y und x bestimmt werden. Auch ist einleuchtend, dass alle Aufgaben, welche 4 Unbekannte mit 2 Gleichungen enthalten, oder 5 Unbekannte mit 3, oder allgemein n Unbekannte mit $n - 2$ Gleichungen hierher gehören, indem sich in allen diesen

Fällen so viele Unbekannte eliminiren lassen, dass nur 3 Unbekannte mit einer Gleichung übrig bleiben. Die weitere Behandlung übersieht sich am Besten bei praktischen Aufgaben, welche deshalb hier folgen.

§. 108. **Aufgabe.** Es werden drei Zahlen L, M und N gesucht von der Beschaffenheit, dass L durch 5 getheilt, 4; M durch 6 getheilt, 5; N durch 7 getheilt, 6 übrig lassen, ihre Summe aber $= 100$ sei.

Auflösung. Offenbar hat die Zahl L die Form $5x + 4$, ebenso ist $M = 6y + 5$ und $N = 7z + 6$. Es ist also

$$5x + 4 + 6y + 5 + 7z + 6 = 100, \text{ oder}$$
$$5x + 6y + 7z = 85.$$

Hieraus folgt:

$$x = \frac{85 - 6y - 7z}{5} = 17y - y - z - \frac{(y + 2z)}{5}.$$

Man setze $y + 2z = 5A$, so ist

$$z = \frac{5A - y}{2} = 2A + \frac{A - y}{2}.$$

Ferner sei $A - y = 2B$, so ist

$$y = A - 2B, \text{ folglich}$$
$$z = 2A + B \text{ und mithin}$$
$$x = 17 - 4A + B.$$

Die Grenzen, zwischen welchen die unbestimmte Hülfsgrösse A liegt, ergeben sich aus den gefundenen Werthen für y und x. Es folgt nämlich aus $y = A - 2B$, dass, damit A eine positive Zahl werde, $A > 2B$

und aus $x = 17 + B - 4A$, dass

$$4A < 17 + B, \text{ oder}$$
$$A < \frac{17 + B}{4} \text{ sein muss.}$$

Setzt man $B = 0$, so fallen die Grenzen für A auf 0 und $4\frac{1}{4}$, wobei für A nur 1, 2, 3, 4 genommen werden kann.

Ist daher	$B =$	0, 0, 0, 0
und	$A =$	1, 2, 3, 4, so ist
$x =$	$17 + B - 4A =$	13, 9, 5, 1,
$y =$	$A - 2B =$	1, 2, 3, 4,
$z =$	$2A + B =$	2, 4, 6, 8,
$L =$	$5x + 4 =$	69, 49, 29, 9,
$M =$	$6y + 5 =$	11, 17, 23, 29,
$N =$	$7z + 6 =$	20, 34, 48, 62.

Nimmt man $B = 1$, so sind die Grenzen für A auf 2 und $4\frac{1}{2}$ eingeschränkt; es kann also nur $A = 3$ oder 4 sein.

Nimmt man daher $B = 1, 1,$
und $A = 3, 4,$ so ist

$$\begin{aligned} x &= 6,\ 2, \\ y &= 1,\ 2, \\ z &= 7,\ 9, \\ L &= 34,\ 14, \\ M &= 11,\ 17, \\ N &= 55,\ 69. \end{aligned}$$

In jedem dieser Fälle ist

$$L + M + N = 100.$$

Anmerkung. Unter der Voraussetzung, dass bei voriger Aufgabe zwei der gesuchten Zahlen, z. B. L und M, einander gleich sind, kann man mit Zuziehung von §. 40. noch eine andere Auflösung herstellen.

§. 109. **Aufgabe.** Unter eine Anzahl Armer sind **100** Thlr. dergestalt zu vertheilen, dass ein Kind 7, eine Frau 9 und ein Mann 11 Thlr. erhalte. Man fragt, wie viele Männer, Frauen und Kinder zulässig sind?

Auflösung. Es seien x Kinder, y Frauen und z Männer, so hat man folgende Gleichung:

$$7x + 9y + 11z = 100. \text{ Folglich}$$

$$x = \frac{100 - 9y - 11z}{7} = 14 - y - z + \frac{2 - (2y + 4z)}{7},$$

$$\text{oder } x = 14 - y - z - \frac{2y + 4z - 2}{7}.$$

Man setze $2y + 4z - 2 = 7A$, so ist

$$y + 2z - 1 = \frac{7A}{2} = 7B.$$

Daher hat man $y = 7B - 2z + 1$
und $x = 13 - 9B + z.$

Wenn also $B = 1, 1, 1,$
und $z = 1, 2, 3,$ so ist
$x = 5, 6, 7$ und
$y = 6, 4, 2.$

§. 110. **Zusatz.** An diesen Beispielen sehen wir, dass auch bei Einer Gleichung mit 3 Unbekannten das Verfahren der

Auflösung dem obigen mit einer Gleichung und zwei Unbekannten im Wesentlichen gleich ist. Dass aber auch die allgemeine Auflösungsformel §. 22. wieder deutlich hervortritt, lässt sich bei der Aufgabe des §. 108. und bei der vorigen folgendermassen nachweisen.

Es ergab sich aus der Gleichung

$$(1)\quad 5x+6y+7z = 85$$

$$x = 17 - y - z - \frac{y+2z}{5}.$$

Setzt man $y+2z = 5w$, so ist

$$y = 5w - 2z, \text{ folglich}$$

$$x = 17 - 6w + z.$$

Setzt man nun diese Werthe von x und y in die Gleichung (1), so erhält man:

$$5(17-6w+z)+6(5w-2z)+7z = 85.$$

Ebenso ergab sich aus der Gleichung der vorigen Aufgabe, nämlich

$$(1)\quad 7x+9y+11z = 100,$$

$$x = 13 - 9B + z \text{ und}$$

$$y = 7B - 2z + 1,$$

also, wenn wir w statt B setzen und diese Werthe von x und y in die Gleichung (1) substituiren:

$$7(13-9w+z)+9(1+7w-2z)+11z = 100.$$

§. 111. **Aufgabe.** Eine Bäuerin hat Gänse, Hühner, Enten und Tauben, zusammen 76 Stück verkauft; eine Gans für 20, ein Huhn für $10\frac{1}{2}$, eine Ente für 7 und eine Taube für 4 Silbergr. und insgesammt 23 Thlr. 17 Sgr. daraus gelöst. Wie viel Stück hatte sie von jeder Gattung?

Auflösung. Sie habe x Gänse, y Hühner, z Enten und u Tauben gehabt, so erhält man folgende Gleichungen:

$$(1)\quad x+y+z+u = 76.$$

$$(2)\begin{cases} 20x+10\frac{1}{2}y+7z+4u = 707, \text{ oder} \\ 40x+21y+14z+8u = 1414. \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Grösse z, indem man die erste mit 14 mult. und dann beide subtrahirt, so ergiebt sich:

$$\begin{array}{r} 40x+21y+14z+8u = 1414 \\ 14x+14y+14z+14u = 1064. \\ \hline \end{array}$$

$$(3)\quad 26x+7y-6u = 350. \text{ Es ist also}$$

$$(4)\quad u = \frac{26x+7y-350}{6} = 4x+y-58+\frac{2x+y-2}{6}.$$

Man setze $2x + y - 2 = 6A$, (5)
so folgt $y = 6A + 2 - 2x$, (6) mithin ist
(7) $u = 7A + 2x - 56$ und
(8) $z = 130 - 13A - x$ (nach 7., 6. u. 1).

Offenbar sind für A und x nur solche Werthe zu nehmen, dass
$13A + x < 130$ (nach 8)
$7A + 2x > 56$ (nach 7) und $3A + 1 > x$,
oder $x - 3A < 1$ (nach 6) sei.

Wenn daher $A = 5, 5, 5 \ldots 6, 6 \ldots 7, 7 \ldots$

so ist
$$\begin{cases} x = 11, 12, 13 \ldots 8, 9 \ldots 6, 7 \ldots \\ y = 10, 8, 6 \ldots 22, 20 \ldots 32, 30 \ldots \\ z = 54, 53, 52 \ldots 44, 43 \ldots 33, 32 \ldots \\ u = 1, 3, 5 \ldots 2, 4 \ldots 5, 7 \ldots \end{cases}$$

Anmerkung. In Heiss Sammlung von Aufgaben aus der allgem. Arithm. u. Algebra, 4te u. 5te Aufl., aus welcher vorstehende Aufg. entnommen, befindet sich S. 260 ein Druckfehler; statt $z = 130 - m + 13n$ muss es heissen:
$$z = 130 - (m + 13n), \text{ oder } 130 - m - 13n.$$

§. 112. **Zusatz.** Eliminirt man die Grösse y aus den Bedingungsgleichungen, so erhält man:
$$-19x + 7z + 13u = 182, \text{ folglich}$$
$$z = 26 + 2x - u + \frac{5x - 6u}{7}.$$

Die weitere Entwickelung führt zu den Formeln:
$$x = 4u + 7C$$
$$y = 50 - 14u - 26C$$
$$z = 26 + 9u + 19C.$$

Je nachdem nun $C = 0, 1, 2 \ldots$ und $u = 0, 1, 2 \ldots$ gesetzt wird, erhält man allemal eine Gruppe von Werthen für die Unbekannten, welche der Aufgabe Genüge leisten.

§. 113. Zuweilen treten bei diesen Aufgaben sehr einfache Gleichungen hervor, welche die Rechnung abkürzen. Ein Beispiel dazu.

Aufgabe. Man sucht vier Zahlen von der Beschaffenheit, dass die Summe der beiden ersten der dritten und ihre Differenz der vierten gleich sei.

Auflösung. Sind diese Zahlen nach der Reihe x, y, z, u, so erhält man folgende Gleichungen:

(1) $x + y = z$
(2) $x - y = u$.

Aus der Addition und Subtraction beider Gleichungen ergiebt sich:

$$(3)\quad x = \frac{z+u}{2} \text{ und}$$

$$(4)\quad y = \frac{z-u}{2}.$$

Man nehme nun z und u nach Belieben an, so dass $z > u$ und beide zugleich gerade oder zugleich ungerade sind, damit man lauter ganze positive Werthe erhält.

Ist also $\begin{matrix} z = 6 \\ z = 7 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} u = 4 \\ u = 3 \end{matrix}$ u. s. w., so hat man

für x, y, z, u die Werthe
5, 1, 6, 4
5, 2, 7, 3 u. s. w. ins Unendliche.

§. 114. **Aufgabe.** Jemand hat vier Stücke Silber A, 7-, B, 8-, C, 12-, D, 13löthig; er wünscht davon 48 Mark 10löthiges Silber zu machen. Wie viel Mark muss er dazu von jeder Sorte nehmen?

Auflösung. Er nehme vom 7löthigen x Mark, vom 8löth. y, vom 12löth. z und vom 13löthigen u Mark, so erhält man folgende Gleichungen:

$$(1)\quad 7x + 8y + 12z + 13u = 480.$$
$$(2)\quad x + y + z + u = 48.$$

Eliminirt man y aus beiden Gleichungen, so erhält man:

$$-x + 4z + 5u = 96. \text{ Folglich ist}$$

$$z = \frac{96 + x - 5u}{4} = 24 - u + \frac{x-u}{4}.$$

Setzt man $x - u = 4A$, so findet sich

$$x = 4A + u \text{ und}$$
$$z = 24 + A - u; \text{ mithin ist}$$
$$y = 24 - (5A + u).$$

Wenn also $A =$	0,	0	...	1,	1,	1	...	2	....
und $u =$	1,	2	...	1,	2,	3	...	4	....
so ist $x =$	1,	2	...	5,	6,	7	...	12	....
$y =$	23,	22	...	18,	17,	16	...	10	....
$z =$	23,	22	...	24,	23,	22	...	22	....

§. 115. **Auflösung Einer Gleichung mit 3 Unbekannten, wenn die Coefficienten derselben paarweise ein gemeinschaftliches Mass haben.** Wenn in der Gleichung $ax + by + cz = d$ zwei Coefficienten, z. B. a und b, ein

gemeinschaftliches Mass haben, so darf man die Glieder ax und bx bei der Auflösung nicht auf einer Seite stehen lassen, wenn man für die Unbekannten gültige Formeln haben will. Hat aber ausser diesen noch ein anderes Paar derselben einen gemeinschaftlichen Factor, so ist zur Auflösung der Gleichung eine Transformation erforderlich, welche sich besser an besonderen Fällen darstellen lässt.

1. Es sei z. B. die Gleichung gegeben:

$$4x + 9y + 6z = 115.$$

Dann ist $4x + 6z = 115 - 9y$. Man div. mit 2, so

$$\text{folgt: } 2x + 3z = 57 - 4y + \frac{1-y}{2}, \text{ oder}$$

$$2x + 3z = 57 - 4y - \frac{y-1}{2}.$$

Man setze nun $\frac{y-1}{2} = u$, oder $y = 2u + 1$ und substituire diesen Werth von y, welcher die Form einer ganzen Zahl hat, in die gegebene Gleichung, so hat man

$$4x + 6z + 9(2u+1) = 115 \text{ oder}$$

$$4x + 6z + 18u + 9 = 115,$$

folglich nach gehöriger Reduction:

$$2x + 3z + 9u = 53, \text{ oder}$$

$$2x + 3z = 53 - 9u.$$

$$\text{Hieraus folgt } x = \frac{53 - 9u - 3z}{2} = 26 - 4u - z + \frac{1 - u - z}{2}$$

$$\text{oder } x = 26 - 4u - z - \frac{u + z - 1}{2}.$$

Man setze $u + z - 1 = 2A$, so wird $z = 2A + 1 - u$. Durch Substitution dieser Werthe von y und z erhält man sodann:

$$x = 25 - 3A - 3u.$$

Wenn daher	$A =$	0	1	1	1	...	2	3	3	4	....
	$u =$	0	0	1	2	...	1	1	2	3	....
so ist	$x =$	25	22	19	16	...	16	13	10	4	....
	$y =$	1	1	3	5	...	3	3	5	7	....
	$z =$	1	3	2	1	...	4	6	5	6	....

2. Es sei gegeben:

$$6x + 10y - 15z = 7. \text{ Dann ist}$$

$$2)\underline{6x + 10y = 7 + 15z}$$

$$\text{folglich } 3x + 5y = 3 + 7z + \frac{z+1}{2}.$$

Sei nun $z + 1 = 2A$, so ist $z = 2A - 1$.
Daher ist $6x + 10y - 30A + 15 = 7$, oder
$3x + 5y - 15A = -4$, und also

$$x = \frac{15A - 5y - 4}{3} = 5A - y - 1 - \frac{2y + 1}{2}.$$

Setzt man $2y + 1 = 3B$, so wird $y = \frac{3B - 1}{2} = B + \frac{B - 1}{3}$

und für $B - 1 = 2C$, folgt: $B = 2C + 1$.
Hiernach ist $y = 3C + 1$ und $x = 5A - 5C - 3$.

Wenn also $A =$	0,	1,	2	2
$C =$	0,	0,	0	1
so ist $x =$	-3,	2,	7	2
$y =$	2,	1,	1	4
$z =$	-1,	1,	3	3.

Will man die gefundenen allgemeinen Werthe auf die Probe nehmen, so substituire man dieselben in die gegebene Gleichung, welcher sie Genüge leisten müssen.

In diesem Beispiele ist

$$6[5A - 5C - 3] + 10[3C + 1] - 15[2A - 1] = 7.$$

3. Sei gegeben $-8x + 9y - 12z = 92$. Dann ist

$$-4)\underline{-8x - 12z = 92 - 9y}, \text{ folgl.}$$

$$2x + 3z = -23 + 2y + \frac{y}{4}.$$

Man setze $y = 4A$, so kommt
$2x + 3z = -23 + 9A$, also

$$z = \frac{-23 + 9A - 2x}{3} = -7 + 3A - \frac{2x + 2}{3}$$

$$= -7 + 3A - \frac{2(x + 1)}{3}.$$

Sei $x + 1 = 3B$, so wird $x = 3B - 1$.
Folglich $z = -7 + 3A - 2B$.

Wenn also $A =$	3,	4,	4,	5,	6 . . .
$B =$	1,	1,	2,	3,	4 . . .
so ist $x =$	2,	2,	5,	8,	11 . . .
$y =$	12,	16,	16,	20,	24 . . .
$z =$	0,	3,	1,	2,	3 . . .

§. 116. **Von der Vermischungsregel (Regula allegationis).** Die Alligationsrechnung (v. d. ital. Worte alligare) umfasst eine Kategorie von Aufgaben, bei denen aus gegebe-

nen Ingredienzen von ungleichem Werthe oder Gehalte eine Mischung hergestellt werden soll, welche einen verlangten mittleren Werth besitzt. Es ist historisch merkwürdig, dass die Vermischungsregel schon in den ältesten Rechenbüchern vorkömmt, wie z. B. bei Simon Jacob von Coburg (1552), Gemma Frisius (1593), P. Laurenberg (1659) und vielen Anderen. Die wissenschaftliche Begründung derselben vermisst man jedoch bei den meisten Schriftstellern; es scheint daher nicht überflüssig, sie hier aufzunehmen, da sie auch von praktischem Interesse ist. Wir geben zuerst diese Regel, wie sie von den Algebraisten ausgesprochen wird.

§. 117. **Allgemeine Regel für die Vermischung mehrerer Ingredienzen von verlangtem Gehalte.**

1) Man setze die Werthe der Ingredienzen so unter einander, dass die höheren Werthe dem mittleren vorangehen und dass die geringeren ihm folgen.
2) Man subtrahire den mittleren Werth von jedem einzelnen höheren und schreibe die Summe der gefundenen Differenzen neben einen jeden geringern Werth, auch subtrahire man jeden geringeren Werth von dem mittleren und setze die Summe dieser Differenzen neben einen jeden der höheren Werthe. — Die so erhaltenen Differenzsummen bestimmen das gesuchte Verhältniss und eine jede derselben bezieht sich allemal auf die entsprechende gegenüberstehende Ingredienz.

Allgemein kann diese Regel deshalb genannt werden, da sie auch den Fall in sich begreift, wo nur zwei verschiedene Materialien gemischt werden sollen, wo dann die Aufgabe völlig bestimmt ist.

Gehen wir nun zu einigen Beispielen über.

§. 118. **Aufgabe.** Es sollen dreierlei Arten Gewürz A, B, C, so mit einander vermischt werden, dass das Pfund 12 Ggr. koste. Es kostet aber das Pfund von A 18 Ggr., von B 16 Ggr. und von C 6 Ggr. Wie viel hat man von jeder Art zu nehmen?

Nach vor. Regel hat man folgenden Ansatz:

$$\begin{array}{cc|l} 18 & & 6 \\ 16 & & 6 \\ & 12 & \\ 6 & & 4+6=10. \end{array}$$

Hier subtrahirt man 6 von 12 und schreibt die Differenz 6 den

höheren Werthen 18 und 16 gegenüber; dann subtrahirt man den mittleren Werth 12 von den besseren 16, 18 und schreibt die Differenzen 4 und 6 der Ingredienz vom geringsten Werthe gegenüber. Endlich addirt man beide und erhält nun die Zahlen 6, 6, 10, oder die verhältnissmässigen Quantitäten 3, 3, 5, welche das Verlangte leisten.

Die Probe überzeugt sogleich von der Richtigkeit dieser Mischungstheile. Es ist nämlich der Werth von

3 Pfd. à 18 Ggr. = 54 Ggr.
3 - à 16 - = 48 -
5 - à 6 - = 30 - folglich kosten

11 Pfd. der Mischung 132 Ggr.,

$$\text{mithin 1 Pfd.} = \frac{132}{11} = 12 \text{ Ggr.}$$

Um den Grund dieses Verfahrens nachzuweisen, nehme man an, dass zu 1 Pfund des Gemisches x Pfund von A, y Pfund von B und z Pfund von C genommen werde. Dann hat man:

$$1)\quad x + y + z = 1$$

$$2)\quad 18x + 16y + 6z = 12, \text{ folglich ist}$$

$$3)\quad \frac{18x + 16y + 6z}{x + y + z} = 12, \text{ oder}$$

$$4)\quad 18x + 16y + 6z = 12x + 12y + 12z.$$

Es ist also

$$5)\quad (18-12)x + (16-12)y = (12-6)z, \text{ oder}$$

$$6x + 4y = 6z$$

$$\text{d. i. } 6)\quad 3x + 2y = 3z.$$

Nimmt man nun für x, y und z beliebige Zahlen an, doch so, dass immer $3x + 2y$ so viel als $3z$ giebt, so kann man so viele Resultate erhalten, als man will, zumal bei solchen Aufgaben die Bedingung, dass nur ganze positive Zahlen gelten sollen, nicht durchaus nothwendig ist. Die gesuchten Zahlen können also sein:

$x = 3 \quad y = 3 \quad z = 5$
$x = 4 \quad y = 3 \quad z = 6$
$x = 5 \quad y = 3 \quad z = 7$ u. s. w.

§. 119. **Aufgabe.** Jemand hat viererlei Silber, nämlich 15, 14, 10 und 7löthiges; er wünscht von jedem etwas zu nehmen, um daraus 13löthiges Silber zu erhalten. Wie viel muss demnach von jedem genommen werden?

Man erhält nach obiger Regel:

				3
A.	15	6, 3	9	3
B.	14	6, 3	9	3
	13			
C.	10	1, 2	3	1
D.	7	1, 2	3	1.

Es ergiebt sich nun zunächst, dass zu 3 Mark 15 löth. und 3 Mark 14 löth. Silber, 1 Mark 10 löth. und 1 Mark 7 löthiges genommen werden muss, um 13 löthiges zu erhalten.

Man nehme nun allgemein von A. x, von B. y, von C. z und von D. t Mark zu einer Mark 13 löth. Silber, so entstehen die beiden Gleichungen:

$$1)\quad x + y + z + t = 1.$$
$$2)\quad 15x + 14y + 10z + 7t = 13.$$

Folglich ist 3) $\frac{15x + 14y + 10z + 7t}{x + y + z + t} = 13$; daher

$$15x + 14y + 10z + 7t = 13x + 13y + 13z + 13t, \text{ oder}$$
$$2x + y = 3z + 6t.$$

Man kann nun für x, y, z, t beliebige Zahlen annehmen, wenn nur $2x + y$ ebenso viel austrägt, als $3z + 6t$. Setzt man z. B.

$$x = 3,\quad y = 3 \text{ und } z = 1,\quad t = 1$$

so ist $2x + y = 9$ und ebenso $3z + 6t = 9$.

Es kann ferner genommen werden:

$$x = 4,\quad y = 7,\quad z = 1,\quad t = 2$$
$$x = 3,\quad y = 6,\quad z = 2,\quad t = 1$$
$$x = 6,\quad y = 3,\quad z = 1,\quad t = 2$$

u. s. w.

Vergleicht man die allgemeine Auflösung mit dem vorhergehenden Ansatze, so sieht man deutlich, warum man die geringeren Werthe von dem verlangten mittleren, sowie diesen von den höheren abziehen müsse, und dann die Summen dieser Differenzen zu nehmen habe, um die gesuchten Proportionaltheile der Ingredienzen zu finden.

§. 120. Andere Regel zur Vermischung. Neben der vorigen Regel besteht noch eine andere, welche ebenso allgemein bei der Mischung beliebig vieler Ingredienzen angewandt werden kann. Sie lautet folgendermassen:

1) **Man ziehe den Mittelwerth von den einzelnen höheren ab und betrachte jede Differenz als den Nenner eines Bruches.**
2) **Man ziehe ferner die Werthe der niedrigeren Ingredienzen von dem mittlern ab und betrachte deren Differenzen ebenfalls als Nenner von Brüchen.**
3) **Man richte hierauf die Zähler der Brüche so ein, dass die Summe der Zähler der höheren Differenzen ebenso gross sei, als die Summe der Zähler der niederen, so erhält man diejenige Quantität, welche von jeder Ingredienz zum verlangten Mittelwerthe zu nehmen ist.**

Folgende Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

§. 121. **Aufgabe.** Ein Weinhändler hat 4 Sorten Wein, wovon die erste 1 Thlr. 20 Gr., die 2te 1 Thlr. 16 Gr., die 3te 1 Thlr. 8 Gr. und die 4te 12 Gr. kostet, und wünscht daraus eine Mittelsorte, die Flasche zu 1 Thlr. zu mischen. Wie viel Flaschen muss er von jeder Sorte dazu nehmen?

Die Rechnung geschieht wie folgt:

1ste Sorte = 44 Gr.	$\frac{\cdot}{20}$	$\frac{20}{20} = 1$ Flasche
2te „ = 40 „	$\frac{\cdot}{16}$	$\frac{32}{16} = 2$ „
3te „ = 32 „	$\frac{\cdot}{8}$	$\frac{8}{8} = 1$ „
Mittelsorte = 24		
4te Sorte = 12	$\frac{\cdot}{12}$	$\frac{60}{12} = 5$ „

Hier ist nun die Summe der Zähler für die Differenzen der höheren oder besseren' Sorten = 20 + 32 + 8 oder 60, und ebenso gross ist der Zähler für die Zwölftel.

Man hat demnach zu 1 Flasche der 1sten Sorte
2 „ von der 2ten „
1 „ „ „ 3ten „
und 5 „ „ „ 4ten „ zu nehmen.

Probe.

1 Flasche à 44 Gr. = 44
2 „ à 40 „ = 80
1 „ à 32 „ = 32
5 „ à 12 „ = 60

9 Fl. kosten daher = 216 Gr., mithin eine = 24 Gr.

So oft man daher solche Zähler finden kann, deren respectiven Summen gleich gross sind, ebenso viel verschiedene Auflösungen

sind möglich. Will man die Verhältnisstheile der Ingredienzen in ganzen Zahlen haben, so müssen natürlich diese Zähler dergestalt gewählt werden, dass die zugehörigen Nenner in ihnen aufgehen.

§. 122. **Aufgabe.** Man soll aus 15, 14, 13 und 7löthigem Silber $4\frac{1}{2}$ Mark 12löthiges zusammensetzen; wie viel muss von jeder Sorte dazu genommen werden?

Auflösung.

15		$\frac{*}{3}$	6	$\frac{6}{3} = 2$ Mark
14		$\frac{*}{2}$	2	$\frac{2}{2} = 1$ „
13		$\frac{*}{1}$	7	$\frac{7}{1} = 7$ „
	12			
7		$\frac{*}{5}$	15	$\frac{15}{5} = 3$ „

Probe.

2 Mark	15 löth.	Silber	enthalten	— 30	Loth fein
1 „	14 „	„	„	— 14	„ „
7 „	13 „	„	„	— 91	„ „
3 „	7 „	„	„	— 21	„ „
13 Mark	enthalten	. . . . .		156	„ „

folglich 1 Mark des Gemisches 12 Loth.

Es bleibt daher nur übrig, die Antheile zu $4\frac{1}{2}$ Mark zu berechnen, welches durch einfache Proportionen leicht geschieht.

$$13 : 4\tfrac{1}{2} = 2 : x \quad \text{folgl. } x = \frac{9}{13}$$

$$13 : 4\tfrac{1}{2} = 1 : x \quad \text{„} \quad x = \frac{4\frac{1}{2}}{13}$$

$$13 : 4\tfrac{1}{2} = 7 : x \quad \text{„} \quad x = \frac{31\frac{1}{2}}{13}$$

$$13 : 4\tfrac{1}{2} = 3 : x \quad \text{„} \quad x = \frac{13\frac{1}{2}}{13}$$

Summa $4\frac{1}{2}$ Mark.

Die Aufgabe des §. 119, wo aus 15, 14, 10 und 7löthigem Silber 13löthiges legirt werden soll, wird nach dieser Regel folgendergestalt aufgelöst:

15		$\frac{\cdot}{2}$	$\frac{4}{2} = 2$ Mark 15löthig
14		$\frac{\cdot}{1}$	$\frac{5}{1} = 5$ „ 14 „
	13		
10		$\frac{\cdot}{3}$	$\frac{3}{3} = 1$ „ 10 „
7		$\frac{\cdot}{6}$	$\frac{6}{6} = 1$ „ 7 „

Probe.

2 Mark 15löth. Silber enthalten 30 Loth fein
5 „ 14 „ „ „ 70 „ „
1 „ 10 „ „ „ 10 „ „
1 „ 7 „ „ „ 7 „ „

9 Mark der Mischung enthalten 117 Loth.
Folglich hält 1 Mark 13 Loth fein.

§. 123. **Beweis dieser Regel.** Man habe allgemein $a$löthiges, $b$löthiges, $c$löthiges, $d$löthiges und $e$löthiges Silber. Wie viel muss man von jedem nehmen, um daraus $m$löthiges zu legiren?

Es sei $a > b > c > m$ und $m > d > e$.

Nun nehme man zu 1 Mark $m$löthigen Silbers

x Mark $a$löthiges; diese enthalten ax Loth fein,
y „ b „ „ „ by „ „
z „ c „ „ „ cz „ „
t „ d „ „ „ dt „ „
u „ e „ „ „ eu „ „

Dann ist 1) $x + y + z + t + u = 1$

2) $ax + by + cz + dt + eu = m$, folglich

3) $\frac{ax + by + cz + dt + eu}{x + y + z + t + u} = m.$

Es ist also

4) $ax + by + cz + dt + eu = mx + my + mz + mt + mu$

davon: $mx + my + mz + dt + eu = mx + my + mz + dt + eu$

so bleibt 5) $(a-m)x + (b-m)y + (c-m)z = (m-d)t + (m-e)u.$

Man setze nun, um dieser Gleichung die einfachste Form zu geben, $x = \frac{\alpha}{a-m}$; $y = \frac{\beta}{b-m}$; $z = \frac{\gamma}{c-m}$; $t = \frac{\delta}{m-d}$ und $u = \frac{\varepsilon}{m-e}$. Dann verwandelt sich die Gleichung (5) in folgende:

$$6)\quad \alpha + \beta + \gamma = \delta + \varepsilon.$$

Hiernach sind nun die Zähler α, β, γ, δ, ε willkührlich, wenn sie nur der Bedingung in (6) genügen, d. h. dass die Zähler-Summe über dem Mittelwerthe ebenso gross ist, als die Summe der Zähler unter demselben. Die Entstehung der vorigen Regel liegt nun auf der Hand.

§. 124. **Zusatz.** Nimmt man nur 2 zu mischende Stoffe von ungleichem Werthe und will man daraus eine Mittelsorte von vorgeschriebenem Gehalte herstellen, so verwandelt sich die Aufgabe in eine bestimmte (unter dem Namen der einfachen Alligationsrechnung bekannt). Man setze, es sollte aus $a$löthigem und $d$löthigem Silber ein $m$löthiges gemacht werden; dann sind die Ansätze nach den beiden obigen Regeln:

I.	a löth.	$m - d$	II.	a	$\frac{n}{a-m}$	$\frac{n}{a-m}$
	m			m		
	d löth.	$a - m$		d	$\frac{n}{m-d}$	$\frac{n}{m-d}$

In I. sind die Verhältnisstheile $m - d$ und $a - m$, oder eigentlich die Brüche $\frac{m-d}{a-d}$ und $\frac{a-m}{a-d}$, welche sich wie ihre Zähler verhalten; dagegen werden in II. die Zähler $= n$ genommen, wo dann $\frac{n}{a-m} : \frac{n}{m-d} = m - d : a - m$, wie vorhin ist.

Dasselbe folgt auch aus der Gleichung (5), wenn man $y = z = u = 0$ setzt, wo dann $x = \frac{\alpha}{a-m}$ und $t = \frac{\delta}{m-t}$ ist.

Da nun hier $\alpha = \delta$ sein muss, so verhalten sich diese Brüche umgekehrt, wie ihre Nenner; daher hat man

$$x : t = m - t : a - m, \text{ wie vorhin.}$$

Anmerk. Auch die Regel Coeci kann bei der Vermischungsrechnung angewandt werden, da sie mit dieser Verwandtschaft besitzt. Was den praktischen Werth betrifft, so hat Bürja*) ganz Recht, wenn er sagt:

„Uebrigens sind diese beiden Rechnungsarten, seitdem die Algebra häufiger gebraucht wird, beinahe in Vergessenheit gerathen.

---

*) Abel Bürja, Der selbstlehrende Algebraist. Berlin 1802. 2r Thl. p. 45.

Sie haben aber doch ihren Nutzen, und sind keineswegs zu verachten; indem man vermittelst derselben manche Aufgabe weit geschwinder auflösen kann, als wenn man erst algebraische Gleichungen aufsetzen wollte.“

Von der Auflösung Einer Gleichung mit vier und mehreren Unbekannten.

§. 125. Führt eine Aufgabe zu einer Gleichung mit 4 unbekannten Grössen, so bleibt uns zu ihrer Auflösung in ganzen positiven Zahlen nichts anderes übrig, als mit derselben auf ähnliche Weise wie vorhin zu verfahren. Zu diesem Ende wird vorausgesetzt, dass die Coefficienten der Gleichung $ax + by + cz + du = f$ relativ prim sind, oder dass nur einige von ihnen ein gemeinschaftliches Mass haben, weil sonst die Auflösung unmöglich sein würde; denn hätten a, b, c, d einen gemeinschaftlichen Factor, der nicht zugleich in f enthalten wäre, so würde die Summe ganzer Zahlen einem Bruche gleich sein müssen, welches nicht angeht.

Wir wollen nun einige Gleichungen dieser Art näher betrachten und den Verlauf der Rechnung an speciellen Beispielen deutlich machen.

§. 126. Es sei die Gleichung aufzulösen:

$$13w + 5x - 9y - 8z = 109. \text{ Dann ist}$$

$$x = \frac{109 + 9y + 8z - 13w}{5}$$

$$= 21 + y + z - 2w + \frac{4 + 4y + 3z - 3w}{5}, \text{ oder}$$

$$= 22 + 2y + z - 2w + \frac{3z - 3w - y - 1}{5}$$

Man setze $3z - 3w - y - 1 = 5A$, so ist

$$3z = 5A + 3w + y + 1, \text{ also}$$

$$z = 2A + w + \frac{y + 1 - A}{3}. \text{ Man setze ferner}$$

$$y + 1 - A = 3B, \text{ so folgt:}$$

$$y = 3B + A - 1. \text{ Daher ist}$$

$$z = 2A + B + w \text{ und}$$

$$x = 20 + 5A + 7B - w.$$

Es sei sofort

$A =$	0	0	0	...	0
$B =$	1	2	3	...	2
$w =$	1	1	1	...	2

$$\text{so ist}\begin{cases} x = 26 & 33 & 40 & \ldots 42 \\ y = 2 & 5 & 8 & \ldots 5 \\ z = 2 & 3 & 4 & \ldots 4 \end{cases}$$

§. 127. Es sei die aufzulösende Gleichung:

$$10x + 8y - z - 3u - 6t = 0.$$ Dann ist

$$10x + 8y = z + 3u + 6t.$$

Man suche nun den Werth von u, so folgt:

$$u = \frac{10x + 8y - 6t - z}{3}$$

$$= 3x + 2y - 2t + \frac{x + 2y - z}{3}.$$

Man setze $x + 2y - z = 3A$, so ist

$$y = \frac{3A + z - x}{2} = A + \frac{A + z - x}{2}.$$

Sei ferner $A + z - x = 2B$, so ergiebt sich

$$x = A - 2B + z,$$ folglich

$$y = A + B$$ und

$$u = 6A - 4B + 3z - 2t.$$

Nun nehme man für die 4 Hülfsgrössen A, B, z, t willkührliche Zahlen an, doch so, dass die erhaltenen Formeln stets positive ganze Zahlen gestatten. Es sei also

$$\begin{array}{l} A = 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \\ B = 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \\ z = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \\ t = 1 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \end{array}$$

$$\text{so ist}\begin{cases} x = 1 & 2 & 1 & 2 \\ y = 3 & 3 & 4 & 5 \\ u = 9 & 8 & 7 & 13. \end{cases}$$

§. 128. **Auflösung von m unbestimmten Gleichungen mit $m+n$ Unbekannten.** Die Aufgabe, aus m Gleichungen mit n unbekannten Grössen, deren Werthe in ganzen positiven Zahlen zu finden, schliesst sich unmittelbar an die vorige, mit Ausnahme des Falles, wo $n = 1$ ist, welcher oben schon abgehandelt ist. Der Gang der Auflösung bleibt im Wesentlichen derselbe wie bisher, nur dass man zuvor so viele Unbekannte aus den Gleichungen eliminirt als möglich ist. Die Werthe für die Unbekannten bestimmen sich dann durch Formeln mit mehr oder weniger Hülfsgrössen. Wir wollen den Anfang mit 4 Unbekannten machen, bei welchen nur zwei Gleichungen gegeben sind. Sind

x, y, z, u die gesuchten Grössen, A und B die beiden Gleichungen, so giebt die Combination folgende drei verschiedenen Fälle. Es enthält nämlich die Gleichung

$$1)\begin{cases} A \text{ die Grössen } x, y, z, u \\ B \quad - \quad - \quad x, y \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} A \quad - \quad - \quad x, y, z, u \\ B \quad - \quad - \quad x, y, z \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} A \quad - \quad - \quad x, y, z, u \\ B \quad - \quad - \quad x, y, z, u. \end{cases}$$

Wir wollen für jeden dieser Fälle ein Beispiel nehmen.

§. 129. 1. Man soll 4 Zahlen bestimmen, deren Eigenschaften durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$\text{I.} \quad 13x + 5y - 9z - 8u = 109.$$
$$\text{II.} \quad 7x - 2y = 49.$$

Aus II. findet man die Werthe

$$x = 2A + 1 \text{ und } y = 7A - 21.$$

Setzt man diese in (I.), so erhält man

$$61A - 9z - 8u = 201.$$

Hieraus ergiebt sich

$$z = 5A - 8B - 1 \text{ und mithin}$$
$$u = 2A + 9B - 24 \text{ u. s. w.}$$

2. Es sollen 4 Zahlen bestimmt werden, wozu folgende Gleichungen gegeben sind:

$$\text{I.} \quad 11x + 6y + 8z - 9u = 43.$$
$$\text{II.} \quad 8x + 3y - 5z = 11.$$

Aus II. folgt: $y = 3 + z - 2x + \frac{2(1+z-x)}{3}.$

Sei $1 + z - x = 3A$, so ist $z = 3A + x - 1$; daher

$$y = 5A - x + 2.$$

Diese Werthe für z und y in I. gesetzt, giebt:

$13x + 54A - 9u = 39$. Daraus folgt:

$$u = x + 6A - 4 + \frac{4x - 3}{9}. \quad \text{Für } 4x - 3 = 9B$$

folgt $x = 2B + \frac{B+3}{4}$ und für $B + 3 = 4C$ erhält man:

$$x = 9C - 6 \text{ sowie } u = 13C + 6A - 13.$$

Wird endlich für x der Werth $9C - 6$ gesetzt, so findet sich $z = 3A + 9C - 7$ und $y = 5A - 9C + 8$, durch welche Formeln sich die gesuchten Zahlen leicht ergeben.

3. Es sollen 4 Zahlen gefunden werden, wozu die Gleichungen gegeben sind:

$$\text{I.}\quad 7x+3y+2z-6u = 70.$$
$$\text{II.}\quad 5x+4y-3z+7u = 64.$$

Um y zu eliminiren hat man

$$21x+9y+6z-18u = 210$$
$$10x+8y-6z+14u = 128, \text{ folglich}$$
$$31x+17y-4u = 338. \text{ Daraus folgt}$$
$$u+7x+4y-84+\frac{3x+y-2}{4}.$$

Man setze $3x+y-2 = 4A$, so ist

$$y = 4A+2-3x \text{ und } u = 17A-5x-76.$$

Diese beiden Werthe in II. substituirt, geben

$$z = 45A-14x-196,$$

wobei x von 1 an, willkührlich angenommen werden kann.

Zum Schlusse dieses Capitels mögen noch einige Beispiele mit mehr als 4 Unbekannten folgen.

§. 130. Sind 5 Unbekannte mit 3 oder mit 2 Gleichungen gegeben, so lassen sich dieselben Combinationen wie im vorigen §. machen. Um nicht zu weitläufig zu werden, wollen wir die zwar theoretisch nicht unwichtigen, jedoch in der Praxis selten vorkommenden Fälle übergehen.

Aufgabe. Fünf Taschenuhren werden auf folgende Art taxirt: man legt einen Ring auf die erste Uhr, dann ist der Werth derselben gegen die andere wie 2 zu 1; auf die zweite gegen die dritte, wie 5 zu 2; auf die dritte gegen die vierte, wie 4 zu 1; auf die vierte gegen die fünfte, wie 5 zu 8. Nun ist die Frage, wie viel ist der Ring werth, und was gilt jede Uhr?

Auflösung. Bezeichnet man den Werth der Uhren nach der Reihe mit

$$\begin{matrix} x & y & z & t & u \\ \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \end{matrix}$$ und den Ring mit r, so ist:

$$r+x:y = 2:1 \quad \text{folglich} \quad 1)\ 2y = r+x$$
$$r+y:z = 5:2 \qquad 2)\ 5z = 2y+2r$$
$$r+z:t = 4:1 \qquad 3)\ 4t = r+z$$
$$r+t:u = 5:8 \qquad 4)\ 5u = 8t+8r.$$

Aus 1. und 2. folgt:

$$5)\ x+3r = 5z, \text{ aus 3.:}$$
$$z = 4t-r, \text{ oder } 5z = 20t-5r$$

daher 6) $x = 20t - 8r$.

Nun ist 7) $x + 8r = 20t$ nach 6; nimmt man davon

$8r = 5u - 8t$ nach 4, so folgt

8) $x = 28t - 5u$. Hieraus ergiebt sich

9) $u = \frac{28t - x}{5} = 5t + \frac{3t - x}{5}$.

Nun sei 10) $3t - x = 5A$, so ist

11) $x = 3t + 5A$. Diesen Werth in 9 gesetzt, giebt

12) $u = 5t + A$. Man bestimme nun r.

Da $8r = 5u - 8t$, nach 4., so folgt, den Werth von u

substit. 13) $8r = 17t + 5A$, also

14) $r = \frac{17t + 5A}{8} = 2t + \frac{t + 5A}{8}$.

Man setze 15) $t + 5A = 8B$,

so folgt 16) $t = 8B - 5A$; daher ist

17) $r = 16B - 10A + B = 17B - 10A$.

Ferner ist 18) $u = 40B - 24A$, nach 12.

Um endlich y und z zu bestimmen, so hat man nach 1., 11., 16. und 17:

$$2y = x + r = 3t - 5A + 17B - 10A.$$
$$= 24B - 15A - 5A + 17B - 10A = 41B - 30A,$$

mithin 19) $y = -15A + 20B + \frac{B}{2}$.

Sei 20) $B = 2C$, so kommt

21) $y = 41C - 15A$.

Endlich ist $z = 4t - r$ nach 3., also

$$z = 32B - 20A - 17B + 10A = 15B - 10A$$

d. i. 22) $z = 30C - 10A$.

Setzt man in die gefundenen Werthe für die Unbekannten überall $2C$ statt B, so erhält man die Formeln:

$$x = 48C - 20A$$
$$y = 41C - 15A$$
$$z = 30C - 10A$$
$$t = 16C - 5A$$
$$u = 80C - 24A$$
$$r = 34C - 10A.$$

Für $C = 1$ kann A nur $= 0, 1, 2$ angenommen werden, da für $A = 3$ der Werth von y negativ wird.

Wenn also: $C = 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \ldots$

$A = 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \ldots$

so ist

$x =$	8	28	48	76	56 . . .
$y =$	11	26	41	67	52 . . .
$z =$	10	20	30	50	40 . . .
$t =$	6	16	16	27	22 . . .
$u =$	32	56	80	136	112 . . .
$r =$	14	24	34	58	48 . . .

Ausser diesen giebt es noch mehrere andere Gruppen von Werthen, welche der Aufgabe Genüge leisten.

§. 131. **Aufgabe.** Es sind die beiden Gleichungen gegeben:

1) $x + y + z + p + q + r = 55.$

2) $15\frac{1}{2}x + 14\frac{1}{2}y + 14z + 8\frac{1}{2}p + 7\frac{1}{2}q + 6r = 715$; man soll daraus die Werthe der 6 Unbekannten finden.

Auflösung. Man mult. (1) mit 12 und (2) mit 2; dann erhält man:

3) $31x + 29y + 28z + 17p + 15q + 12r = 1430$

4) $12x + 12y + 12z + 12p + 12q + 12r = 660.$

folgl. 5) $19x + 17y + 16z + 5p + 3q = 770.$

Damit ist also eine Gleichung mit 5 Unbekannten gewonnen, welche, der obigen Regel gemäss, weiter aufgelöst werden kann.

Will man jedoch schnell einen, oder einige Werthe für die Unbekannten haben, so kann man dazu folgenden Weg einschlagen: Man unterbreite den beiden gegebenen Gleichungen eine Aufgabe aus der Alligationsrechnung, entferne die etwaigen Brüche durch Multiplication mit dem kleinsten Generalnenner, mit welchem ebenfalls der verlangte Mittelwerth zu vervielfachen ist und bestimme endlich nach §. 120. die Zähler der höheren Sorte dergestalt, dass ihre Summe gleich der Summe der Zähler der niederen Sorten sei, so geben die erhaltenen Quotienten, sofern ihre Summe mit der bekannten Zahl der 1. Gleichung übereinstimmt, die gesuchten Werthe in ganzen Zahlen.

Bei diesen Gleichungen kann die entsprechende Aufgabe lauten: Ein Goldschmied hat ein Werk von 55 Mark 13löthigem Silber zu machen; er besitzt nun $15\frac{1}{2}$-, $14\frac{1}{2}$-, 14-, $8\frac{1}{2}$-, $7\frac{1}{2}$- und 6löthiges Silber. Wie viel muss er von jeder Sorte dazu nehmen? Der Ansatz ist:*)

*) Weil nämlich 55 in 715 genau 13mal enthalten ist.

	2				
	$15\frac{1}{2}$	31	$\frac{100}{5} = 20$		$\frac{80}{5} = 16$
	$14\frac{1}{2}$	29	$\frac{48}{2} = 16$		$\frac{60}{2} = 20$
13	14	28	$\frac{8}{2} = 4$	Oder:	$\frac{8}{2} = 4$
2	$8\frac{1}{2}$	17	$\frac{54}{9} = 6$		$\frac{72}{9} = 8$
26	$7\frac{1}{2}$	15	$\frac{88}{11} = 8$		$\frac{66}{11} = 6$
	6	12	$\frac{14}{14} = 1$		$\frac{14}{14} = 1$
			55		55

Man erhält daher:

$x = 20;\ y = 16;\ z = 4;\ p = 6;\ q = 8;\ r = 1$, oder

$x = 16;\ y = 20;\ z = 4;\ p = 8;\ q = 6;\ r = 1.$

§. 132. **Lehrsatz.** Aus m unabhängigen Gleichungen zwischen $m+1$, $m+2$ ...... $m+n$ Unbekannten können immer $m-1$ dieser Grössen eliminirt werden, und lässt sich dadurch das ganze System von Gleichungen auf Eine Gleichung mit resp. 2, 3, ... oder $n+1$ Unbekannten reduciren.

Beweis. Es ist darzuthun, dass

m Gleichungen mit $m+n$ Unbekannten sich auf
1 Gleichung mit $n+1$ „ bringen lassen.

Der Kürze wegen bezeichne man die auf Null reducirten Gleichungen

1) $ax + a_1y + a_{11}z + \ldots = 0$ mit $A = 0$
2) $bx + b_1y + b_{11}z + \ldots = 0$ mit $B = 0$
3) $cx + c_1y + c_{11}z + \ldots = 0$ mit $C = 0$

u. s. w.

Betrachten wir zuerst den Fall, wo $m = 2$ und $n = 1$, (oder allgemein: m Gleichungen mit $m+1$ Unbekannten), so kann z. B. die Grösse x aus der 1[sten] und 2[ten] Gleichung eliminirt werden, indem $A = 0$ mit b und $B = 0$ mit a mult. uns die neuen Gleichungen giebt:

$$\begin{array}{l} Ab = 0 \\ Ba = 0 \\ \hline Ab - Ba = 0 \end{array}$$

, durch deren Subtraction wir $Ab - Ba = 0$ erhalten mit den Unbekannten y und z.

Ist $m = 3$ und $n = 1$, so wird zur Eliminirung von x aus der

$$\begin{array}{ll} \text{1. Gleichung } Ab = 0 & \qquad \text{aus der 1. Gleichung } Ac = 0 \\ \text{2. } \quad ,, \quad Ba = 0 & \qquad \text{2. } \quad ,, \quad Ca = 0, \text{ also} \\ \hline Ab - Ba = 0 & \qquad Ac - Ca = 0 \end{array}$$

welche beiden Gleichungen nur noch 3 Unbekannte, y, z, u enthalten. Aus diesen kann man nun wie im 1sten Falle wieder eine Unbekannte, z. B. y eliminiren, wodurch wir demnach auf eine Gleichung mit 2 Unbekannten kommen.

So wie hier der 2te Fall auf den 1sten zurückkömmt, ebenso findet dieses auch bei 4 Gleichungen mit 5, bei 6 Gleichungen mit 7 u. s. w. allgemein bei m Gleichungen mit $m+1$ Unbekannten statt.

Man würde aber sehr irren, wenn man glauben wollte, dass aus der Combination der ersten dieser m Gleichungen mit jeder der übrigen, wie auch die 2te mit der 3ten u. s. w. combinirt, und dadurch dieselbe Unbekannte wie zuvor eliminirt, dann mehr unabhängige Gleichungen hervorgehn würden. Diess findet jedoch nicht statt; denn aus der Combination von $A = 0$ mit $B = 0$, um x fortzuschaffen, erhalten wir

(1) $Ab - Ba = 0$. Ebenso führt die Combin. von $A = 0$ und $C = 0$ zu der Gleichung

$$(2) \quad Ac - Ca = 0.$$

Combinirt man nun $B = 0$ mit $C = 0$, so wird die daraus hervorgehende Gleichung (3) $Bc - Cb = 0$. Diese Gleichung ist aber keine unabhängige, sondern folgt aus (1) und (2); denn mult. man (1) mit c und (2) mit b und subtrahirt dann beide, so folgt:

$$\begin{aligned} Abc - Bac &= 0 \\ Acb - Cab &= 0 \\ \hline Bac - Cab &= 0, \end{aligned}$$ oder div. durch a:

$$Bc - Cb = 0,$$

welches dieselbe Gleichung ist wie (3). Dasselbe lässt sich von jeder andern Combination der Gleichungen darthun. *)

---

*) Wir wollen diess durch ein Beispiel erläutern. Es sei gegeben:

$$\begin{aligned} &1) \quad x - 9y + 3z - 10u = 21 \\ &2) \quad 2x + 7y - z - u = 683 \\ &3) \quad 3x + y + 5z + 2u = 195. \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) schaffe man x weg, so erhält man:

$$4) \quad 25y - 7z + 9u = 641.$$ Ebenso folgt aus (3) und (1)

$$5) \quad 28y - 4z + 32u = 132.$$

Nun comb. man (2) und (3), so folgt

$$6) \quad 19y - 13z - 7u = 1659.$$ Ferner (4) mit (5) comb. giebt

$$7) \quad -96z - 268u = 14648$$ und endlich giebt 4 mit 6 comb.

$$8) \quad -192z - 536u = 29296.$$ Diese Gleichung ist aber keine unabhängige, denn mult. man (7) mit 2, so entsteht diese 8te.

Gesetzt nun, man habe m Gleichungen mit $m+n$ Unbekannten. Combinirt man die erste dieser Gleichungen mit der 2ten, 3ten und jeder folgenden, und eliminirt bei jeder Combination dieselbe Unbekannte, so erhält man $m-1$ Gleichungen mit einer Unbekannten weniger als jene m gegebenen Gleichungen. Combinirt man ebenso die erste dieser $m-1$ Gleichungen successiv mit jeder anderen, um dadurch eine 2te Unbekannte zu eliminiren, so gelangt man offenbar zu $m-2$ Gleichungen. Setzt man dieses Verfahren so fort, so gelangt man zuletzt zu Einer Gleichung mit einer gewissen Anzahl unbekannter Grössen, deren Fortschritt zu folgender abnehmenden Reihe führt:

m	Gleichungen mit	$m+n$	Unbekannten	
$m-1$	- -	$m+n-1$	-	
$m-2$	- -	$m+n-2$	-	
$m-3$	- -	$m+n-3$	-	
.		.		
.		.		
.		.		
.		.		
$m-(m-1)$	- -	$m+n-(m-1$	-	d. i.
1	- -	$n+1$	-	

§. 133. Will man eine allgemeine Regel aufstellen, nach welcher bei der Auflösung unbestimmter Aufgaben zu verfahren ist, so liesse sich eine solche etwa folgendermassen aussprechen:

„Man entwickele aus den Datis die mögliche Anzahl von Bedingungsgleichungen, eliminire darauf aus diesen so viele Unbekannte, als es angeht, um dadurch auf eine Gleichung mit der geringsten Anzahl von Unbekannten zu kommen. Aus dieser letzten Gleichung suche man den Werth einer Unbekannten, indem man einstweilen die übrigen auf die andere Seite der Gleichung schafft alle Glieder durch Division mit dem Coefficienten der gesuchten Grösse verkleinert und dabei stellvertretende Hülfsgrössen einführt. Endlich drücke man zurücksubstituirend die übrigen Unbekannten durch diese Hülfsgrössen aus und nehme in den so gefundenen Formeln unter den gehörigen Einschränkungen beliebige Werthe für jene an."

Auch liegt schon darin ein Widerspruch, dass, wenn zuletzt 2 unabhängige Gleichungen erscheinen könnten mit 2 Unbekannten, die unbestimmte Aufgabe sich dann in eine bestimmte verwandelte, welches unmöglich ist.

V. Capitel.

Auflösung der unbestimmten Gleichung $ax \mp by = c$ vermittelst der Kettenbrüche.

§. 134. Dem berühmten französischen Mathematiker Lagrange verdanken wir eine elegante Auflösung der Gleichung $ax \mp by = c$ durch Anwendung der Kettenbrüche.

Das ganze Verfahren lässt sich auf drei Hauptpunkte bringen, indem man von der Form $ax - by = 1$ zu der allgemeineren $ax - by = c$ und dann zu der coordinirten $ax + by = c$ übergeht. Dabei wird nun aus der Theorie der Kettenbrüche die wichtige Relation vorausgesetzt, dass nämlich, wenn $\frac{p}{q}$ der dem Urbruche $\frac{a}{b}$ unmittelbar vorhergehende Näherungsbruch (convergirender oder Partial-Bruch) ist, allemal die Gleichung besteht:

$$aq - bp = \pm 1.$$

§. 135. Es sei die unbestimmte Gleichung

$$ax - by = 1$$

aufzulösen, wo a, b, x, y ganze Zahlen sind und a prim zu b. Man verwandle sofort $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch (dessen Glieder immer den Zähler 1 haben und positive ganze Zahlen als Nenner). Ist dann $\frac{p}{q}$ der letzte Näherungsbruch und man findet

$$aq - bp = +1$$

so ist sogleich $x = q$

und $y = p$ und hat man damit eine Auflösung gefunden. Bezeichnet nun t jede ganze Zahl, so erhält man die allgemeinen Werthe für die beiden Unbekannten:

$$x = q + bt$$
$$y = p + at.$$

Findet man dagegen

$aq - bp = -1$, so hat man

$$x = -q$$

$y = -p$; daher die allgemeinen Werthe:

$$x = -q + bt \text{ und}$$
$$y = -p + at.$$

§. 136. Ebenso einfach ist auch die Auflösung der Gleichung $ax - by = c$ (bei welcher dieselbe Voraussetzung wie vorhin gilt). Es sei wieder $\frac{p}{q}$ der letzte Näherungswerth für $\frac{a}{b}$, wodurch man erhält:

$$aq - bp = \pm 1.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit c, so folgt:

$$a \,.\, cq - b \,.\, cp = \pm c.$$

Nimmt man also $x = cq$ und $y = cp$, so sind die entsprechenden allgemeinen Werthe:

$$x = cq + bt$$
$$y = cp + at,$$

welche der Gleichung Genüge leisten.

Diese Formeln gelten, so lange c positiv ist, oder wenn $a \,.\, cq - b \,.\, cp = +c$. Wenn dagegen

$$a \,.\, cq - b \,.\, cp = -c$$

so hat man
$$x = -cq + bt$$
$$y = -cq + at.$$

Es sind demnach für die Gleichung

$$ax - by = \pm c$$

die allgemeinen Werthe

$$\begin{cases} x = \pm cq + bt \\ y = \pm cp + at. \end{cases}$$

§. 137. Soll endlich die Gleichung

$$ax + by = c$$

aufgelöst werden, so herrscht hier eigentlich kein anderer Unterschied, als dass man für $+y$ nur $-y$ setzt, um dieser Gleichung die vorige Form zu geben. Es ist nämlich:

$ax + by = ax - b(-y) = c$, und die übrige Rechnung bleibt sich ganz gleich; man könnte auch eine Hülfsgrösse $y = -z$ substituiren, wodurch sich die gegebene Gleichung in $ax - bz = c$ verwandelt, allein dieses ist überflüssig.

Um das ganze Verfahren auf einen allgemeinen Fall zu reduciren, bringe man die gegebene Gleichung auf die Form

$$ax - by = c, \text{ so ist}$$
$$bx) \overline{}$$
$$\frac{a}{b} - \frac{y}{x} = \frac{c}{bx}. \text{ Nun giebt:}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{p}{q} = \pm\frac{1}{bq}, \text{ folglich}$$

$$aq - bp = \pm 1 \quad (\pm c$$

$$\text{daher } a(\pm cq) - b(\pm cp) = c.$$

Es ist demnach $x = \pm cq$; $y = \pm cp$ eine Auflösung und daher allgemein:

$$x = \pm cq \mp bt$$
$$y = \pm cp \mp at.$$

§. 138. Wir wollen jetzt einige Beispiele zur Erläuterung vornehmen.

Nr. 1. Welche Zahlen gehen durch 26 getheilt auf und geben durch 19 getheilt 1 zum Reste?

Offenbar erhält man hier sogleich

$$26x - 19y = 1.$$

Verwandelt man $\frac{26}{19}$ in einen Kettenbruch, so erhält man die Quotienten 1, 2, 1, 2, 2, und die Näherungswerthe, nach dem bequemen Mechanismus berechnet, sind:

	2	1	2	2	
1	1	3	4	11	26
0	1	2	3	8	19

von denen also $\frac{11}{8}$ der letzte ist, $= \frac{p}{q}$. Nun ist

$$26 . 8 - 19 . 11 = -1, \text{ folglich}$$
$$x = -8 \text{ oder } = -8 + 19 = 11$$
$$y = -11 \quad „ \quad = -11 + 26 = 15.$$

Daher ist die gesuchte Zahl $26x = 286$

oder $19y + 1 = 286$, welche von allen übrigen die kleinste ist.

Nr. 2. Umgekehrt, welche Zahlen gehen mit 19 auf, geben aber mit 26 dividirt den Rest 1?

Hier ist die Gleichung:

$$19x - 26y = 1.$$

Der Bruch $\frac{19}{26}$ giebt die Quotienten 1, 2, 1, 2, 2. Die Näherungswerthe sind daher

	2	1	2	2	
0	1	2	3	8	19
1	1	3	4	11	26

also ist $\frac{p}{q} = \frac{8}{11}$, folglich hat man:

$$19.11 - 26.8 = +1$$

wonach $x = 11$ und $y = 8$.

Es ist also die kleinste gesuchte Zahl $= 19x$ oder $26y + 1 = 209$.

Nr. 3. Welche Zahlen sind durch 10 theilbar und geben durch 37 getheilt den Rest 1?

Hier hat man $10x - 37y = 1$.

Nun ist $\frac{10}{37} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}}$. Die Näherungsbrüche sind daher:

$$\begin{array}{c|c|c|c} & & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 11 \end{array}.$$

Weil nun $10.11 - 37.3 = -1$, so wird $\begin{cases} x = -11 \\ y = -3 \end{cases}$

oder $\begin{cases} x = -11 + 37 = 26 \\ y = -3 + 10 = 7 \end{cases}$ u. s. w.

Anmerkung. Sobald man bei dem letzten Näherungsbruche $\frac{p}{q}$ und dem gegebenen $\frac{a}{b}$ findet, dass

$a.q - bp = +1$ ist, kann man sogleich $x = q$ und $y = p$ nehmen; ist dagegen

$a.q - b.p = -1$ und will man gern gleich positive Werthe für x, y haben, so vermehre man die Glieder des Kettenbruches $\frac{a}{b}$ um $\frac{1}{1}$, indem man dem vorhergehenden Theilnenner 1 abnimmt. Man setze daher

für $\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}}$ den gleichen Bruch $\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}}}$

indem man dem letzten Nenner 3 eine Einheit abzieht und statt $\frac{1}{3}$ schreibt: $\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}$. Dann sind die Näherungsbrüche

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 11 & 26 \end{array},$$ also ist $\frac{p}{q} = \frac{7}{26}$. Man hat nun $x = 26$

und $y = 7$, und kann darauf so viele andere Werthe finden, als man will. Hierbei ist der Umstand massgebend, dass in der Reihe der Näherungsbrüche die Differenz der reciproken Producte allemal $+1$ wird, wenn die Anzahl der Glieder des Kettenbruches ungerade ist; dagegen -1, wenn diese Anzahl gerade ist.

Gerade darin besteht der Vorzug der Kettenbrüche bei solchen unbestimmten Gleichungen, dass man schneller für x und y eine Auflösung erhält, als nach dem algebraischen Verfahren.

Nr. 4. Es sei die Gleichung aufzulösen:

$$17x - 19y = 3.$$

Da $\frac{17}{19} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{2}}}$, so sind die Näherungswerthe

$$\overset{8}{\smile}$$

$$\frac{0}{1} \;\Big|\; \frac{1}{1} \;\Big|\; \frac{8}{9}$$

Da nun $17 \,.\, 9 - 19 \,.\, 8 = +1$, so erhält man

$$17(27) - 19(24) = 3, \text{ folglich}$$

$x = 27$ und $y = 24$; allgemein $27 + 19t = x$ und $24 + 17t = y$.

Nr. 5. Es sei gegeben: $13x + 17y = 100$; man setze:

$$13x - 17(-y) = 100.$$

Nun ist $\frac{13}{17} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}$ und die Näherungsbrüche sind:

$$\overset{3}{\smile}$$

$$\frac{0}{1} \;\Big|\; \frac{1}{1} \;\Big|\; \frac{3}{4}$$

Daher ist $13 \,.\, 4 - 17 \,.\, 3 = 1$, folglich

$$13(400) + 17(-300) = 100$$

mithin $x = +400$ und $y = -300$.

In diesem Beispiele ist eine Auflösung in ganzen positiven Zahlen unmöglich.

Nr. 6. Gegeben: $19x + 7y = 117$.

Es ist $\frac{19}{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$.

Die Näherungsbrüche sind:

	1	2	2	
1	2	3	8	19
0	1	1	3	7

Daher $\frac{p}{q} = \frac{8}{3}$ und $\frac{a}{b} = \frac{19}{7}$,

folglich $aq \quad - bp \quad = \quad 1$, d. i.

$$19 \cdot 3 \quad - 8 \cdot 7 \quad = \quad 1 \quad (117$$

$$19(3 \cdot 117) - 8(7 \cdot 117) = 117, \text{ d. i.}$$

$$19(351) \quad - 7(936) \quad = 117, \text{ oder}$$

$$19(351) \quad + 7(-936) = 117.$$

Also $x = 351$ und $y = -936$, womit eine Auflösung zuvörderst geschehen ist.

Nr. 7. Gegeben: $17x - 49y = -8$.

$\frac{17}{19}$ in einen Kettenbruch verwandelt, giebt die Näherungsbrüche:

		1	7
0	1	1	8
1	2	3	23

Nun ist $17(23) - 19(8) = -1 \quad (8$

folglich $17(184) - 19(64) = -8.$

Mithin ist $x = 184$ und $y = 64$, und die allgemeinen Werthe sind: $x = 184 + 49t$

$y = 64 + 17t.$

Um die kleinsten positiven Werthe zu erhalten, braucht man nur $t = -3$ zu nehmen.

Nr. 8. Gegeben: $9x + 13y = 2000$.

Die Näherungsbrüche für $\frac{9}{13}$ sind:

		2
0	1	2
1	1	3

Nun ist $9(3) \quad - 13(2) \quad = \quad 1 \quad (2000$

daher $9(6000) - 13(4000) \quad = 2000.$

Oder $9(6000) + 13(-4000) = 2000.$ Daraus folgt:

$x = 6000 - 13t$ und

$y = -4000 + 9t.$ Für $t = 445$ erhält man die kleinsten Werthe, nämlich

$x = 215$ und $y = 5$.

Es ist einerlei, welchen von den beiden Brüchen $\frac{a}{b}$ oder $\frac{b}{a}$

man in einen Kettenbruch verwandelt, indem der eine das Umgekehrte des andern ist (d. h. b ist der reciproke Werth von $\frac{a}{b}$).
Die weitere Auflösung der Gleichung wird dadurch nicht wesentlich abgeändert. Denn es sei

$$ax - by = \pm c.$$

Man setze vor der Hand

$$ax - by = \pm 1.$$

Dividirt man die Gleichung durch ay, so entsteht:

$$\frac{x}{y} - \frac{b}{a} = \frac{\pm c}{ay}.$$

Wird nun der Bruch $\frac{b}{a}$ in einen Kettenbruch verwandelt und davon der letzte Näherungsbruch, der jetzt $\frac{q}{p}$ sein muss (da derselbe bei $\frac{a}{b}$ durch $\frac{p}{q}$ ausgedrückt wird), so ist

$$a \,.\, p - b \,.\, q = \pm 1, \text{ folglich, mit } c \text{ mult.:}$$

$$a \,.\, cp - b \,.\, cq = \pm c,$$

wo dann $x = cp$ und $y = cq$ gesetzt werden kann. Diese Auflösung harmonirt ganz mit der obigen (§. 136), indem das dortige $\begin{cases} p \\ q \end{cases}$ hier durch $\begin{cases} q \\ p \end{cases}$ ausgedrückt ist, also das obige cq hier cp sein muss.

Es sei z. B. $25x - 14y = -3$.

Da nun $\frac{14}{25} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} & 1 & 3 & 1 & 2 & \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 & 14 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 7 & 9 & 25 \end{array}$$

Der letzte Partialbruch ist also $\frac{5}{9}$, folglich hat man

$$5 \,.\, 25 - 14 \,.\, 9 = -1 \quad (3$$

$$\text{daher } 25(15) - 14(27) = -3.$$

Es ist demnach $x = 15$ und $y = 27$.

Wäre dagegen die Gleichung

$$25x - 14y = +3$$

gegeben, so stelle man den Kettenbruch durch Zusatz eines Gliedes so dar:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}$$

wo dann der letzte Partialbruch $\frac{9}{16}$ entsteht und also $25.9 - 14.16 = +1$ ist, daher

$$25(27) - 14(48) = 3.$$

Hier ist nun $x = 27$ und $y = 48$. u. s. w.

§. 140. Wir haben aus dem Bisherigen gesehen, dass die Auflösung unbestimmter Gleichungen des ersten Grades lediglich von der Auflösung der Gleichung

$$ax \mp by = c$$

abhänge. Es ist daher nicht unwichtig, die Anzahl der Auflösungen im Voraus angeben zu können. Die bereits im 1. Cap. angegebene Bestimmung dieser Anzahl bei der Gleichung $ax + by = c$, lässt sich vermittelst der Eigenschaften der Kettenbrüche auch auf folgende Weise a priori feststellen. Zu diesem Ende möge die Auflösung der Gleichung $ax + by = c$ noch einmal recapitulirt werden.

Gebe $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch verwandelt $\frac{p}{q}$ zum letzten Näherungswerthe, so ist

$$a.q - b.p = \pm 1 \quad (\pm c$$

folglich $a(\pm cq) - b(\pm cp) = \mp c.$

Oder $a(\pm cq) + b(\mp cp) = + c$; daher ist

$x = + cq$ und $y = - cp$; oder

$x = - cq$ und $y = + cp$.

Die allgemeinen Werthe sind mithin:

1) $x = cq - bt$ und $y = - cp + at$

2) $x = - cq + bt$ und $y = cp - at$.

Um die positiven Werthe von x und y zu erhalten, müssen daher für den ersten Fall die Differenzen $cq - bt$ und $at - pc$ positiv sein; es muss also $bt < cq$ und $at > pc$, folglich

$$t < \frac{cq}{b} \text{ und } t > \frac{pc}{a} \text{ sein.}$$

Wenn dagegen im 2ten Falle

$x = -qc + bt$ und $y = pc - at$, wo ebenfalls die Differenzen $bt - qc$ und $pc - at$ positiv sein müssen, so ist wiederum

$$bt > qc \quad \text{und} \quad at < cp,$$

$$\text{also} \quad t > \frac{qc}{b}, \text{ so wie } t < \frac{cp}{a}.$$

Man erhält demnach in beiden Fällen für x und y nur so lange positive ganzzahlige Werthe, als t innerhalb der Grenzen $\frac{qc}{b}$ und $\frac{cp}{a}$ liegt, so dass die Anzahl der Auflösungen allgemein durch die Formel

$$\frac{cq}{b} - \frac{cp}{a}$$

ausgedrückt wird.

Sollte $\frac{cq}{b} - \frac{cp}{a} = 0$ sein, so fallen beide Grenzen zusammen und es giebt alsdann keine Auflösung; ebensowenig wird dieses stattfinden, wenn sie sich widersprechen.

Z. B. 1) Wie viele Auflösungen gestattet die Gleichung

$$5x + 12y = 864?$$

Da hier aus $\frac{5}{12}$ der Näherungsbruch $\frac{p}{q} = \frac{2}{5}$ hervorgeht, so ist $\frac{864 . 5}{12} - \frac{864 . 2}{5} = 360 - 345 = 15.$

2) Wie viele Auflösungen gestattet die Gleichung

$$13x + 17y = 100?$$

Aus $\frac{13}{17}$ findet man $\frac{p}{q} = \frac{3}{4}$. Es ist also

$$\frac{100 . 4}{17} - \frac{100 . 3}{13} = 23 - 23 = 0.$$

Demnach ist die Auflösung unmöglich.

3) Wie viele Auflösungen gewährt die Gleichung

$$7x + 11y = 100?$$

Der Bruch $\frac{7}{11}$ giebt die Näherungswerthe:

		1	1	3
0	1	1	2	7
1	1	2	3	11

wo also $\frac{p}{q} = \frac{2}{3}$ sein würde. Da aber dieser Bruch von ungerader Zahl ist, so hat man ein Glied mehr zu nehmen und erhält daher: $\frac{p}{q} = \frac{5}{8}$.

Nun ist $\frac{cq}{b} = \frac{100 \, . \, 8}{11} = 72$

und $\frac{cp}{a} = \frac{100 \, . \, 5}{7} = 71$. Es ist demnach $72 - 71$, d. i. nur eine Auflösung möglich.

§. 141. Die Auflösung einer Gleichung mit drei Unbekannten lässt sich ebenfalls vermittelst der Kettenbrüche bewerkstelligen und hängt diese lediglich von der Auflösung der Gleichung $ax - by = c$ ab, oder vielmehr von der Grundform $a \, . \, q - b \, . \, p = \mp 1$.

Denn es sei $ax + by + cz = d$ die vorgelegte Gleichung, so transponire man das 3te Glied auf die andere Seite, wodurch nun $ax + by = d - cz$ entsteht.*)

Giebt nun $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch verwandelt zum vorletzten Näherungswerthe $\frac{p}{q}$, so hat man wieder

$$a \, . \, q - b \, . \, p = \mp 1.$$

Die allgemeinen Auflösungsformeln sind also dem Obigen zufolge:

$$x = q(d - cz) - bt$$

und $y = p(d - cz) - at$, wobei im Grunde die Substitution von $d - cz$ für das obige c den einzigen Unterschied zwischen diesem und dem vorigen Falle ausmacht. Die Grenzen, welche man hier zu berücksichtigen hat, sind offenbar folgende:

1) $cz < d$, 2) $bt < q(d - cz)$ und 3) $at > p(d - cz)$.

§. 142. Wir wollen das eben Gesagte durch einige besondere Beispiele erläutern.

1) Es sei die Gleichung $5x + 7y + 11z = 224$ aufzulösen. Man setze

$$5x + 7u = 224 - 11z.*)$$

Nun ist $\frac{5}{7} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$, woraus sich der vorletzte Näherungswerth $\frac{p}{q} = \frac{2}{3}$ ergiebt. Daher (weil dieser von gerader Zahl) hat man:

$$a \, . \, q - b \, . \, p = +1, \text{ d. i.}$$
$$5 \, . \, 3 - 7 \, . \, 2 = 1.$$

---

*) Dem Anfänger ist es gemeiniglich bequemer, die Form $ax - by = d - cz$ herzustellen, zu welchem Ende nur eine vorläufige Substitution, etwa $y = -u$ nöthig ist, und wo zuletzt der für u gefundene Werth nur negativ zu nehmen ist, um y zu erhalten.

Mult. man auf beiden Seiten mit $224-11z$, so folgt:

$$5\,.\,3(224-11z)+7\,.\,-2(224-11z)=224-11z.$$

Daraus folgt: $x = 3(224-11z)-7t = -33z-7t+672$

und $y = -2(224-11z)+5t = +22z+5t-448$.

Diese Formeln sind jedoch oft unbequemer als diejenigen, welche durch die algebr. Auflösung hervorgehen (nämlich $x = 3A - 4B$; $y = 32+A-5B$; $z = 5B-2A$).

Es ergeben sich nun u. a. folgende Werthe für $z = 1, 2, 3 \ldots$

$$x = 2,\ 4,\ 6,\ 8\ \ldots.$$
$$y = 29,\ 26,\ 23,\ 20\ \ldots.$$
$$z = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots.$$

2) Es sei gegegen $5x+8y+7z=50$. Dann ist

$$5x+8y=50-7z.$$

Der Bruch $\frac{5}{8}$ giebt den Näherungswerth $\frac{p}{q}=\frac{2}{3}$. Nun ist $5\,.\,3 - 8\,.\,2 = -1$, also mit $-(50-7z)$ mult.

$$5\,.\,-3(50-7z)+8\,.\,2(50-7z)=50-7z.$$

Es ist also $x = -3(50-7z)+8t = 21z+8t-150$,

$y = 2(50-7z)-5t = -14z-5t+100$, wo man für z und t beliebige ganze Zahlen annehmen kann. Setzt man $z = 1$, so wird, da $21z+8t > 150$ sein muss,

sowie $14z+5t < 100$, $8t > 129$ und $5t < 86$

d. i. $t > 16\frac{1}{8}$ und $t < 17\frac{1}{5}$ zu nehmen sein. Für $t = 17$ und $z = 1$ findet man $x = 7$ und $y = 1$. Für $z = 2$ findet man $t < 14\frac{2}{5}$ und $> 13\frac{1}{8}$, so dass für $t = 14$ der Werth von $x = 4$ und $y = 2$ sich ergiebt. Ferner sei $z = 3$, so wird

$x = 8t-87$ also $8t > 87$ und $t > 10\frac{7}{8}$

$y = 58-5t$ „ $5t < 58$ und $t < 11\frac{3}{5}$. Man setze daher $t = 11$; dann erhält man $x = 1$ und $y = 3$ u. s. w.

§. 143. So sinnreich auch die Anwendung der Kettenbrüche zur Lösung der unbestimmten Gleichungen vom ersten Grade ist, so kann man doch nicht läugnen, dass sie etwas complicirt erscheint. Dem Anfänger wird es erst durch Einübung vieler Beispiele gelingen die gehörige Festigkeit zu erlangen, indem so oft auf das + und —, sowie auf Geradesein des vorletzten Näherungswerthes Rücksicht genommen werden muss.

Es möge nun noch gezeigt werden, wie man zu verfahren habe, wenn eigentlich kein Näherungsbruch stattfindet, oder vielmehr der ursprüngliche Bruch nicht gleich in die Form eines Ket-

tenbruches zu bringen ist, in welchem Falle eins oder mehrere Glieder durch 0 zu interpretiren sind.

Es sei die aufzulösende Gleichung

$$5x - y = 7.$$

Man verwandle den Bruch $\frac{5}{1}$ in einen Kettenbruch auf folgende Art: $\frac{5}{1} = 4 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{1}}$. Die Näherungswerthe sind

sodann: $\frac{1}{0} \Big| \frac{4}{1} \Big| \frac{1}{0} \Big| \frac{5}{1}$ (mit den Quotienten 0, 1); der vorletzte also $= \frac{1}{0}$, daher $p = 1$ und $q = 0$. Folglich ist $a \cdot q - bp = \mp 1$ hier

$$\frac{5 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1}{5 \cdot 0 - 1 \cdot (-7) = 7}(-7$$

und demnach $x = 0 + t$

$y = -7 + 5t.$

Für $t =$	0,	1,	2,	3	....
ist $x =$	0,	1,	2,	3	....
$y =$	-7,	-2,	3,	8	....

VI. Capitel.

Von den Progressional- oder Systembrüchen.

§. 144. Nimmt man von einer geometrischen Progression, deren Anfangsglied $= 1$ und deren Exponent eine beliebige ganze Zahl a ist, also von der Reihe:

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots\ldots\ a^n\ \ldots$$

irgend ein Glied a^n zum Nenner eines Bruches, dessen Zähler $= z$ ist, so heisst ein solcher, wie $\frac{z}{a^n}$, ein Progressionalbruch von der Grundzahl oder Basis a.

Da nun die Ordnungs- oder Rangzahlen eines jeden Zahlensystems nach einer geometrischen Progression fortschreiten, welche mit 1 anhebt und deren Exponent = der Basis des Zahlensystems ist, so wird jeder Progressionalbruch mit gleichem Rechte „Systembruch" genannt.

§. 145. Unsere Decimal-, Duodecimal- und Sexagesimalbrüche sind nur besondere Arten von Systembrüchen, indem be

ersteren die Reihe 1, 10, 100, 1000, 10000, etc.
oder 1, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, etc., bei den
zweiten die Reihe 1, 12, 144, 1728, 20736, etc.
oder 1, 12^1, 12^2, 12^3 12^4, etc. und bei
letzteren die Reihe 1, 60, 3600, 216000, 12960000, etc.
oder 1, 60^1, 60^2, 60^3, 60^4, etc.
zum Grunde liegt.

§. 146. Aus der Potenzenlehre ist bekannt, dass jede Potenz mit negativem Exponenten einem Bruche gleichwerthig sei, welcher zum Zähler die 1 und zum Nenner dieselbe Potenz mit positivem Exponenten hat, oder dass $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ ist.

Demgemäss können wir jeden Systembruch von der Basis a durch

$$z \,.\, a^{-m}$$

bezeichnen, so wie dieses auch bei den Decimalbrüchen üblich ist.

Jeder Decimalbruch ist unter der Form $z \,.\, 10^{-m}$; jeder Duodecimalbruch unter der Form $z \,.\, 12^{-m}$ enthalten.

Sehr einfach ist zwar die Bezeichnung von Hellwig*), nach welcher $z \,.\, a^{-m}$ durch ${}^m z$ dargestellt und wobei der Exponent m die Kennziffer genannt wird; allein da hierbei die Basis nicht angegeben ist, so würde man bei der Vergleichung zweier Systembrüche von verschiedener Basis hiermit nicht viel gewinnen.

So ist z. B. $\frac{25}{100}$ oder $0{,}25 = 25 \,.\, 10^{-2}$
$3{,}141592 = 3141592 \,.\, 10^{-6}$
$\frac{157}{1728} = 157 \,.\, 12^{-3}$ u. s. w.

§. 147. Es ist leicht, zwei Systembrüche von ungleichen Nennern gleichnamig zu machen. Es seien $p \,.\, a^{-n}$ und $q \,.\, a^{-r}$ die beiden gegebenen Brüche, so ist

$$p \,.\, a^{-n} = \frac{p}{a^n} = \frac{pa^r}{a^{n+r}} = pa^r \,.\, a^{-(n+r)}$$

$$q \,.\, a^{-r} = \frac{q}{a^r} = \frac{qa^n}{a^{n+r}} = qa^n \,.\, {}^{-(n+r)}.$$

Hier sind die Exponenten der Nenner, nämlich n und r die eigentlichen Stellenzahlen, so dass es nur der Ergänzung der nie-

*) Anfangsgründe der allgem. Mathem. und der Arithmetik von Hellwig. Braunschweig 1777.

drigen zur höheren bedarf. Z. B. $53 \, . \, 10^{-2}$ und $7416 \, . \, 10^{-5}$ erhalten die Form: 0,53000 und 0,07416.

Ferner $25 \, . \, 12^{-3}$ und $9 \, . \, 12^{-5} = \frac{25 \, . \, 12^2 \, . \, 12^{-3}}{12^2}$ und $9 \, . \, 12^{-5}$ u. s. w.

§. 148. Eben so wenig Schwierigkeit hat die Addition und Subtraction zweier Systembrüche von einerlei Basis. Es ist z. B.

$$pa^{-n} \mp qa^{-r} = (pa^r \mp qa^n) \, . \, a^{-(n+r)}, \text{ weil}$$

$$pa^{-n} \mp qa^{-r} = \frac{p}{a^n} \mp \frac{q}{a^r} = \frac{pa^r}{a^{n+r}} \mp \frac{qa^n}{a^{n+r}} = [pa^r \mp qa^n]a^{-(n+r)}.$$

Die daraus fliessende Regel wird Jeder selbst angeben können.

Haben die zu addirenden Systembrüche schon gleiche Nenner oder gleiche Kennziffern, so hat man nur die Zähler zu addiren und ganz ähnlich verfährt man bei deren Subtraction. So ist z. B.

$$pa^{-m} + qa^{-m} = (p + q)a^{-m} \text{ und}$$

$$pa^{-m} - qa^{-m} = (p - q)a^{-m}.$$

§. 149. Sollen zwei Systembrüche mit einander multiplicirt werden, so multiplicire man deren Zähler und addire die Kennziffern, deren Summe alsdann zur Kennziffer des Products genommen wird. Es ist nämlich $pa^{-n} \times qa^{-r} = pqa^{-(n+r)}$, weil

$$pa^{-n} = \frac{p}{a^n} \text{ und } qa^{-r} = \frac{q}{a^r}, \text{ also}$$

$$pa^{-n} \times qa^{-r} = \frac{p}{a^n} \times \frac{q}{a^r} = \frac{pq}{a^{n+r}} = pqa^{-(n+r)}.$$

So ist z. B. $0{,}256 \times 0{,}27 = \frac{256 \times 27}{10^5} = \frac{6912}{10^5} = 6912 \, . \, 10^{-5}$

§. 150. Ist ein Systembruch durch einen anderen zu dividiren, so kann der Quotient auf zwei verschiedenen Wegen erhalten werden. Man verfährt ganz nach der Formel:

$$pa^{-n} : qa^{-r} = \frac{p}{q}a^{r-n}, \text{ wobei die 3 Fälle, dass}$$

entweder $-r > n$, oder $-r < n$, oder $-r = m$ ist, unterschieden werden.

Oder man macht den Divisor qa^{-r} zur ganzen Zahl durch Multiplication mit a^r, so verwandelt sich der Divisor in q. Um ebensovielmal mache man den Dividendus pa^{-m} durch Mult. mit derselben Grösse a^r grösser, dann bleibt sich der Quotient gleich und man hat: $pa^{-n} : qa^{-r} = pa^{-m+r} : q = \frac{p}{q}a^{-m+r}$.

Ein Paar Beispiele zur Erläuterung.

1) Es soll 0,4 durch 0,128 dividirt werden,
d. i. $4 \,.\, 10^{-1} : 128 \,.\, 10^{-3} = \frac{4}{128} \,.\, 10^3 \,.\, 10^{-1}$
Oder $= \frac{1}{32} \,.\, 10^2 = 3125 \,.\, 10^{-3} = 3{,}125$.

2) Es sei 0,00004 durch 0,128 zu dividiren,
d. i. $4 \,.\, 10^{-5} : 128 \,.\, 10^{-3} = \frac{1}{32} \,.\, 10^{-2} = 0{,}0003125$.

3) Es sei 4 durch 3,125 zu dividiren,
d. i. $4 \,.\, 10^0 : 3125 \,.\, 10^{-3} = \frac{4}{3125} \,.\, 10^3 = 128 \,.\, 10^{-2} = 1{,}28$.

§. 151. **Aufgabe.** Einen gemeinen Bruch $\frac{A}{B}$ in einen Systembruch von gegebener Basis α zu verwandeln.

Auflösung. Man multiplicire den Zähler des gegebenen Bruches A mit der Basis α, dividire das Product durch den Nenner B und merke den Quotienten und Rest r. Diesen multiplicire man wieder mit der Basis und dividire wie vorhin mit B; die erhaltenen Quotienten geben die beiden ersten Stellenzahlen des gesuchten Bruches vom Range α^{-1} und α^{-2}. Ist dabei der Dividend $< B$, so tritt Null an die Stelle des Quotienten. Auf diese Weise fahre man fort, bis die Division aufgeht, oder als es die Genauigkeit erfordert. Man erhalte bei dieser Operation:

$A\alpha$	dividirt durch	B	zum Quot.	q	und zum Reste r
$r\alpha$	- -	B	- -	q_1	- - - r_1
$r_1\alpha$	- -	B	- -	q_{11}	- - - r_{11}
.		.		.	.
.		.		.	.
.		.		.	.
.		.		.	.
.		.		.	.
$r_{n-1}\alpha$	- -	B	- -	q_{n-1}	- - - r_n,

dann ist $\frac{A}{B} = \frac{q}{\alpha} + \frac{q_1}{\alpha^2} + \frac{q_{11}}{\alpha^3} + \ldots\ldots \frac{q_n}{\alpha^{n+1}} + \ldots\ldots$

Beweis. Da

$A\alpha = Bq + r$, so ist $\frac{A}{B} = \frac{q}{\alpha} + \frac{r}{\alpha B}$ (1). Da nun

$r\alpha = Bq + r_1$, so ist $\frac{r\alpha}{B} = q_1 + \frac{r_1}{B}$

oder $\frac{r}{\alpha B} = \frac{q_1}{\alpha^2} + \frac{r_1}{\alpha^2 B}$. Diesen Werth von $\frac{r}{\alpha B}$ in (1)

gesetzt, giebt: $\frac{A}{B} = \frac{q}{\alpha} + \frac{q_1}{\alpha^2} + \frac{r_1}{\alpha^2 B}$ (2). Da ferner:

$r_1\alpha = Bq_{11}+r_{11}$, so ist $\frac{r_1\alpha}{B} = q_{11} + \frac{r_{11}}{B}$, oder (mit α^3 divid.) $\frac{r_1}{\alpha^2 B} = \frac{q_{11}}{\alpha^3} + \frac{r_{11}}{\alpha^3 B}$. Setzt man diesen Werth für $\frac{r_1}{\alpha^2 B}$ in (2), so bekommt man:

$$\frac{A}{B} = \frac{q}{\alpha} + \frac{q_1}{\alpha^2} + \frac{q_{11}}{\alpha^3} + \frac{r_{11}}{\alpha^3 B} \quad (3).$$

Wiederum ist $r_{11}\alpha = Bq_{111}+r_{111}$, also $\frac{r_{11}\alpha}{B} = q_{111}+\frac{r_{111}}{B}$, oder (mit α^4 divid.) $\frac{r_{11}}{\alpha^3 B} = \frac{q_{111}}{\alpha^4} + \frac{r_{111}}{\alpha^4 B}$. Dies in (3) gesetzt, giebt:

$$\frac{A}{B} = \frac{q}{\alpha} + \frac{q_1}{\alpha^2} + \frac{q_{11}}{\alpha^3} + \frac{q_{111}}{\alpha^4} + \frac{r_{111}}{B\alpha^4},$$ woraus sich offenbar die Richtigkeit der obigen Reihe ergiebt.

§. 152. Wir wollen die vorige Aufgabe sogleich durch einige Beispiele erläutern.

1) Es sei der Bruch $\frac{11}{16}$ in einen Systembruch von der Basis 10 zu verwandeln. Dann erhält man $\frac{110}{16} = 6$ und den Rest 14. Dieser Quotient ist vom Range 10^{-1} oder $= \frac{6}{10}$. Ferner ist $\frac{140}{16} = 8$ mit dem Reste 12, wobei der Quot. 8 vom Range 10^{-2}, also $= \frac{8}{100}$ ist. Dann giebt $\frac{120}{16}$ den Quot. 7 nebst dem Reste 8, wodurch $\frac{7}{10^{-3}}$ oder $\frac{7}{1000}$ erhalten ist. Endlich giebt $\frac{80}{16}$ den Quot. 5 ohne Rest. Es ist also

$$\frac{11}{16} = \frac{6}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{5}{10^4} = 0{,}6875.$$

2) Es sei $\frac{3}{7}$ in einen Systembruch von der Basis $\alpha = 5$ zu verwandeln. Man hat alsdann folgende Divisionen:

7|15|2	7|5|0	7|25|3	7|20|2	7|30|4	7|10|1	
14	0	21	14	28	7	u. s. f.
1	5	4	6	2	3	

wodurch $\frac{3}{7} = \frac{2}{5} + \frac{0}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{2}{5^4} + \frac{4}{5^5} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.}$

welches man auch abgekürzt schreiben könnte:

0,203241 . . (bas. V). Das Verfahren brauchte hier nicht weiter fortgesetzt zu werden, da sich die Periodicität des Bruches $\frac{3}{7}$ herausstellt.

3) Es sei $\frac{4}{10}$ in einen Systembruch von der Basis $\alpha = 3$ zu verwandeln. Man erhält dann:

$$\begin{array}{r|r|l} 10 & 12 & 1 \\ & 10 & \\ \hline & 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|r|l} 10 & 6 & 0 \\ & 0 & \\ \hline & 6 & \end{array} \quad \begin{array}{r|r|l} 10 & 18 & 1 \\ & 10 & \\ \hline & 8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l} 10 & 24 & 2 \\ & 20 & \\ \hline & 4 & \end{array} \quad \begin{array}{r|r|l} 10 & 12 & 1 \\ & 10 & \\ \hline & 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|r|l} 10 & 6 & 0 \\ & 0 & \\ \hline & 6 & \end{array} \quad \begin{array}{r|r|l} 10 & 18 & 1 \\ & 10 & \\ \hline & 8 & \end{array}$$

etc. und es ist

$$\frac{4}{10} = \frac{1}{3} + \frac{0}{9} + \frac{1}{27} + \frac{2}{81} + \frac{1}{243} + \text{etc.} = 0,10121 \ldots \text{(bas. III)}.$$

4) Man soll den Bruch $\frac{13}{20}$ in einen Duodecimalbruch verwandeln. Da hier die Basis $\alpha = 12$ ist, so erhält man:

$$\frac{13}{20} = \frac{7}{12} + \frac{9}{12^2} + \frac{7}{12^3} + \frac{2}{12^4} + \frac{4}{12^5} + \text{etc.}$$

Da hierbei Quotienten wie 10 und 11 vorkommen, so sind besondere Ziffern zu wählen, indem die Zähler der Systembrüche nur mit einer Ziffer geschrieben werden; auch kann man sich der Klammern bedienen. Einige Schriftsteller schreiben: Δ für 10 und ∇ für 11 in der Dodecadik.

§. 153. Bei der Anwendung der Systembrüche in der unbest. Analytik ist es bequemer, die Verwandlung gemeiner Brüche in folgender Form darzustellen:

$(\frac{11}{16})$ Bas. X.

$$\begin{aligned} 11 . 10 &= 16 . 6 + 14 \\ 14 . 10 &= 16 . 8 + 12 \\ 12 . 10 &= 16 . 7 + 8 \\ 8 . 10 &= 16 . 5 + 0 \end{aligned}$$

$(\frac{3}{7})$ Bas. V.

$$\begin{aligned} 3 . 5 &= 7 . 2 + 1 \\ 1 . 5 &= 7 . 0 + 5 \\ 5 . 5 &= 7 . 3 + 4 \\ 4 . 5 &= 7 . 2 + 6 \\ 6 . 5 &= 7 . 4 + 2 \\ 2 . 5 &= 7 . 1 + 3 \end{aligned}$$

etc.

$(\frac{4}{10})$ Bas. III.

$$\begin{aligned} 4 . 3 &= 10 . 1 + 2 \\ 2 . 3 &= 10 . 0 + 6 \\ 6 . 3 &= 10 . 1 + 8 \\ 8 . 3 &= 10 . 2 + 4 \end{aligned}$$

etc.

$(\frac{13}{20})$ Bas. XII.

$$\begin{aligned} 13 . 12 &= 20 . 7 + 16 \\ 16 . 12 &= 10 . 9 + 12 \\ 12 . 12 &= 20 . 7 + 4 \\ 4 . 12 &= 20 . 2 + 8 \\ 8 . 12 &= 20 . 4 + 16 \end{aligned}$$

etc.

Ist der zu verwandelnde Bruch unächt, so bleibt das Verfahren ungeändert, nur dass man zuvor die Ganzen absondert. So ist z. B.

$$\frac{16}{11} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \text{etc. für die Basis X.}$$

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \text{etc. für die Basis V.}$$

$$\frac{10}{4} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \text{etc. für die Basis III.}$$

Oder:

$(\frac{16}{11})$ Bas. X.	$(\frac{7}{3})$ Bas. V.	$(\frac{10}{4})$ Bas. III.
$16 = 11 . 1 + 5$	$7 = 3 . 2 + 1$	$10 = 4 . 2 + 2$
$5 . 10 = 11 . 4 + 6$	$1 . 5 = 3 . 1 + 2$	$2 . 3 = 4 . 1 + 2$
$6 . 10 = 11 . 5 + 5$	$2 . 5 = 3 . 3 + 1$	$2 . 3 = 4 . 1 + 2$
$5 . 10 = 11 . 4 + 6$	$1 . 5 = 3 . 1 + 2$	etc.
$6 . 10 = 11 . 5 + 5$	$2 . 5 = 3 . 3 + 1$	
etc.	etc.	

§. 154. **Aufgabe.** Einen Systembruch $\frac{z}{a^m}$ in einen andern derselben Basis von gegebener Rangzahl r zu verwandeln.

Auflösung. Der Zähler des gesuchten Bruches sei $= x$, so hat man die Gleichung: $\frac{z}{a^m} = \frac{x}{a^r}$, woraus man erhält:

$$x = \frac{z . a^r}{a^m} = z . a^{r-m}.$$

Z. B. $\frac{127}{10^3}$ wie viel $\frac{}{100}$? Antw. $\frac{127 . 10^2}{10^3} = \frac{12,7}{10^2}$

oder es ist $\frac{127}{1000} = \frac{12,7}{100}$.

§. 155. **Aufgabe.** Einen Systembruch von der Basis a in einen anderen von gegebener Basis b zu verwandeln.

Auflösung. Es sei der gegebene Bruch $= \frac{p}{a^m}$, so soll sein:

$$\frac{p}{a^m} = \frac{x}{b} + \frac{y}{b^2} + \frac{z}{b^3} + \frac{t}{b^4} + \text{etc.}$$

Die Zähler dieser Brüche werden nun durch successive Divisionen mit a^m bestimmt, nachdem zuvor p mit b mult. und der jedesmal gebliebene Rest ebenfalls mit b mult. ist.

Wäre z. B. der Decimalbruch $\frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{6}{1000}$ in einen Duodecimalbruch zu verwandeln, so bringe man diese einfachen Brüche auf einen Bruch von der höchsten Rangzahl 1000. Dann geschieht die Rechnung wie folgt:

$$\frac{526}{1000}=\frac{526\,.\,12}{1000}=6+\frac{312}{1000}$$
$$\frac{312}{1000}=\frac{312\,.\,12}{1000}=3+\frac{744}{1000}$$
$$\frac{744}{1000}=\frac{744\,.\,12}{1000}=8+\frac{928}{1000}$$
$$\frac{928}{1000}=\frac{928\,.\,12}{1000}=11+\frac{136}{1000}$$ u. s. w. Es ist also:
$$\frac{526}{1000}=\frac{6}{12}+\frac{3}{12^2}+\frac{8}{12^3}+\frac{11}{12^4}+\text{etc.}$$

Sollte man $\frac{7}{12}+\frac{8}{12^2}$ in einen Decimalbruch verwandeln, so bringe man beide Brüche auf einen von der Rangzahl 12^2; dann hat man $\frac{7\,.\,12}{12^2}$ oder $\frac{84}{12^2}+\frac{8}{12^2}$ oder $\frac{92}{144}$. Die weitere Rechnung ergiebt:
$$\frac{92}{144}=\frac{920}{144}=6+\frac{56}{144};\ \frac{56}{144}=\frac{560}{144}=3+\frac{128}{144};$$
$$\frac{128}{144}=\frac{1280}{144}=8+\frac{128}{144};\ \frac{128}{144}=\frac{1280}{144}=8+\frac{128}{144}\ \text{etc.}$$
Es ist daher: $\frac{92}{144}=\frac{6}{10}+\frac{3}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{8}{10000}+\text{etc.}$

Soll also ein Systembruch von der Basis a in einen anderen von der Basis b verwandelt werden, so ist nur nöthig, jenen durch einen einfachen Bruch von der höchsten Rangzahl darzustellen und dann diesen nach der Aufgabe in §. 151 weiter zu behandeln.

Wollte man z. B. den Duodecimalbruch $\frac{125}{12^3}$ in einen Sexagesimalbruch verwandeln, so erhält man:
$$\frac{125}{1728}=\frac{4}{60}+\frac{20}{60^2}+\frac{25}{60^3}=\frac{15625}{60^3}=\frac{15625}{216000}.$$

§. 156. **Zusatz.** Nach dem Vorigen ist es leicht, gegebenes Decimalmass in Duodecimalmass und umgekehrt, zu verwandeln. So ist z. B. 5′2″6‴ Dc., weil bei beiden Masseintheilungen die Ruthe als Einheit gleich ist, = 6′3″8‴11^{IV} . . . Ddc.

Ebenso 7′8″ Ddc. = 6′3″8‴8^{IV} . . . . Dc. (welches die beiden vorigen Exempel sind).

Wollte man z. B. 6′4″1‴ Dc. in Ddc. verwandeln, so hat man nur nöthig den Bruch $\frac{641}{1000}$ in einen Duodecimalbruch zu verwandeln, und man erhält:

6′4″1‴ Dc. = 7′8″3‴7^{IV} . . . Ddc.

Auf eben die Art kann man Sexagesimal-Mass in Decimal- oder Duodecimal-Mass und umgekehrt verwandeln.

Eine allgemeine Formel zur Verwandlung des Decimalmasses in Duodecimalmass und umgekehrt, giebt Lehmus in seiner Geometrie.

Es sei $a' b'' c'''$ Dc. in Ddc. zu verwandeln. Dann ist:

$$a' b'' c''' \text{ Dc.} = a' + (2a + b)'' + (4a + 5b + c)''' + \text{etc. Ddc.}$$

Ebenso ist:

$$a' b'' c''' \text{ Ddc.} = 8a'' + (3a + 6b)''' + (3a + 9b + 5c)^{IV} + (3a + 4b + 7c)^{V} + \text{etc. Dc.}$$

VII. Capitel.

Auflösung der unbestimmten Gleichung $ax \mp by = c$ vermittelst der Progressional- oder Systembrüche.

§. 157. Wir wollen zuerst von der Form

$$ax - by = c$$

ausgehen und es sei die Gleichung $3x - 10y = 4$ gegeben, so ist

$$3x = 10y + 4.$$

Verwandelt man nun den Bruch $\frac{4}{10}$ in einen Systembruch von der Basis 3, so erhält man nach Cap. VI. §. 151.:

$$4.3 = 10.1+2$$
$$2.3 = 10.0+6$$
$$6.3 = 10.1+8$$
$$8.3 = 10.2+4$$
$$2.3 = 10.0+6 \text{ etc.}$$

Vergleicht man die aufzulösende Gleichung mit diesen Divisionsgleichungen, so entspricht derselben offenbar die dritte von diesen, nämlich: $3.8 = 10.2+4$, woraus sich sogleich die Werthe ergeben $x = 8$ und $y = 2$, womit also eine Auflösung hergestellt ist und die übrigen Werthe für x, y nach dem im Cap. I. §. 22. entwickelten Gesetze leicht weiter gefunden werden können.

§. 158. Wäre dagegen die folgende Gleichung gegeben:

$$10x = 3y + 4,$$

so würde man bei der Verwandlung des Bruches $\frac{4}{3}$ in einen Systembruch von der Basis 10 folgende Gleichungen erhalten:

$$1.10 = 3.3+1$$

$1.10 = 3.3+1$ etc. Multiplicirt man diese Gleichung mit 4, so erhält man:

$$4.10 = 12.3+4,$$

welche Gleichung mit der gegebenen verglichen, sofort $x = 4$ und $y = 12$ giebt.

Hätte man aber die Gleichung

$$3x = 4y+10$$

aufzulösen, so verwandle man den Bruch $\frac{10}{4}$ in einen Systembruch von der Basis 3. Man erhält:

$$3.2 = 4.1+2$$
$$3.2 = 4.1+2$$
etc.

Multiplicirt man diese Gleichung mit 5, so erhält man

$3.10 = 4.5+10$. Hiermit die gegebene

$3.x = 4.y+10$ verglichen, so folgt:

$x = 10$ und $y = 5$.

Wollte man statt dessen den Bruch $\frac{4}{10}$ in einen Systembruch von der Basis 3 verwandeln, so würde man die Gleichung

$4.3 = 10.1+2$ erhalten, deren 5faches

$20.3 = 10.5+10$ giebt; allein der Coefficient von y ist dann nicht mehr 4 und deshalb wäre y nicht in ganzen Zahlen bestimmt.

§. 159. Diese Betrachtungen führen nun zu der allgemeinen Vorschrift:

Um die Gleichung $ax - by = c$ aufzulösen, gebe man ihr die Gestalt $ax = by + c$ und verwandle den Bruch $\frac{c}{b}$ in einen Systembruch von der Basis a nach Cap. VI. §. 151., woraus sich die speciellen Divisionsgleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} a.c &= b.q + r \\ a.r &= b.q_1 + r_1 \\ a.r_1 &= b.q_{11} + r_{11} \\ &\vdots \\ a.r_{n-1} &= b.q_n + c. \end{aligned}$$

Weil hierbei die Coefficienten von x und y, nämlich a und b prim zu einander sind, so muss nach dem vorigen Capitel auch die letzte

Gleichung $ar_{n-1} = bq_n + c$ erscheinen und so bietet sie nothwendig auch eine Auflösung der gegebenen Gleichung dar, wobei $x = r_{n-1}$ und $y = q_n$ ist. Demnach sind der vorletzte Rest und die letzte Stelle in der Periode des aus $\frac{c}{b}$ erhaltenen Systembruches für die Basis a diejenigen Werthe von x und y, welche der Gleichung Genüge leisten.

§. 160. Dieses Verfahren ist jedesmal anwendbar, wenn $\frac{c}{b}$ ein ächter Bruch, oder $c < b$ ist; aber auch der Fall, wo $\frac{c}{b}$ unächt, oder $c > b$, lässt sich, wie wir an dem Beispiele in §. 158. sahen, dem vorigen unterordnen.

Zu diesem Ende setze man:

$c = nb + d$, so dass $d < b$; nimmt man alsdann $y = y_1 - n$, so geht die Gleichung

$ax = by + c$ über in folgende:

$ax = b(y_1 - n) + nb + d$ oder:

$ax = by_1 - bn + nb + d$ d. i.

$ax = by_1 + d$.

Auf diese Gleichung kann nun ganz die vorige Methode angewandt werden.

Nehmen wir das obige Beispiel zur Erläuterung. Es war gegeben: $3x = 4y + 10$ (wo $c = 10$, $b = 4$ und $c > b$ ist). Setzt man: $10 = 4n + d$, so findet man leicht $n = 2$ und $d = 2$. Daraus folgt: $y = y_1 - 2$ und

$$3x = 4y_1 - 8 + 10 = 4y_1 + 2.$$

Verwandelt man nun den Bruch $\frac{2}{4}$ in einen Systembruch von der Basis 3, so erhält man:

$3.2 = 4.1 + 2$, folglich $x = 2$ und $y_1 = 1$.

Es ist also: $y = y_1 - 2 = -1$; mithin

$x = \;\; 2,\; 6,\; 10,\; 14 \ldots.$

$y = -1,\; 2,\;\; 5,\;\; 8 \ldots.$

Beispiel 2. Gegeben: $8x = 7y + 37$.

Hier ist für $37 = 7.n + d$ die Grösse $n = 5$ und $d = 2$, also $y = y_1 - 5$ gesetzt, verwandelt die Gleichung in:

$$8x = 7y_1 + 2.$$

Der Bruch $\frac{2}{7}$ für die Basis 8, giebt

$$8.2 = 7.2 + 2,$$

mithin ist $x = 2$ und $y_1 = 2$, daher $y = 2 - 5 = -3$.

Es ist also $x = \;\; 2,\;\; 9,\;\; 16 \ldots\ldots$

und $y = -3,\;\; 5,\;\; 13 \ldots\ldots$

Beispiel 3. Gegeben: $28x - 45y = 53$, oder

$$28x = 45y + 53.$$

Da für $53 = 45n + d$, $n = 1$ und $d = 8$ ist, so setze man $y = y_1 - 1$ und man erhält: $28x = 45y_1 + 8$.

Nun giebt $\frac{8}{45}$ in einen Systembruch von der Basis 28 verwandelt, die Gleichungen:

$$28 \,.\; 8 = 45 \,.\; 4 + 44$$
$$28 \,.\, 44 = 45 \,.\, 27 + 17$$
$$28 \,.\, 17 = 45 \,.\, 10 + 26$$
$$28 \,.\, 26 = 45 \,.\, 16 + \;\, 8.$$

Es ist also $x = 26$ und $y_1 = 16$, folglich

$x = 26$ und $y = 15$, welche Werthe der gegebenen Gleichung genügen.

§. 160. Betrachten wir jetzt die Auflösung der 2ten Gleichung:

$$ax + by = c.$$

Diese wird nun sehr einfach dadurch bewerkstelligt, dass man $-z$ für y substituirt und nach für z aufgefundenem Werthe den von y erhält. Für den Fall, wo der Coefficient von y, nämlich $b = 1$ ist, verwechsle man die Glieder und schreibe statt

$$ax + y = c$$

die Gleichung $y = -ax + c$.

Folgende Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

Beispiel 1. Es sei die Gleichung $7x + 11y = 200$ oder $7x = -11y + 200$ aufzulösen, welche sich für $-z = y$ verwandelt in

$$7x = \;\; 11z + 200.$$

Setzt man nun $200 = 11n + d$, so ergiebt sich $n = 18$ und $d = 2$. Für $z = z_1 - n$ hat man also $z = z_1 - 18$,

folglich $7x = 11z_1 - 198 + 200$ oder

$$7x = 11z_1 + \;\; 2.$$

Die Verwandlung des Bruches $\frac{2}{11}$ in einen Systembruch von der Basis 7 giebt:

$$7 \,.\;\; 2 = 11 \,.\, 1 + \;\, 3$$
$$7 \,.\;\; 3 = 11 \,.\, 1 + 10$$
$$7 \,.\, 10 = 11 \,.\, 6 + \;\, 4$$
$$7 \,.\;\; 4 = 11 \,.\, 2 + \;\, 6$$

$$7 \,.\, 6 = 11 \,.\, 3 + 9$$
$$7 \,.\, 9 = 11 \,.\, 5 + 8$$
$$7 \,.\, 1 = 11 \,.\, 0 + 7$$
$$7 \,.\, 7 = 11 \,.\, 4 + 5$$
$$7 \,.\, 5 = 11 \,.\, 3 + 2,$$
wo man statt dieser letzten Gleichung auch sogleich die dritte nehmen konnte, welche durch Division mit 2 dasselbe giebt.

Es ist also $x = 5$ und $z_1 = 3$; daher $z = 3 - 18 = -15$ und mithin $y = 15$.

Beispiel 2. Es sei $11x + 42y = 600$ aufzulösen.

Man erhält für $11x = 42z + 600$
und $600 = 42n + d$,
$n = 14$ und $d = 12$.

Es ist also $11x = 42(z_1 - 14) + 600$, oder
$$11x = 42z_1 \qquad + 12.$$

Bei der Verwandlung des Bruches $\frac{11}{42}$ für die Basis 12, erhält man sofort

$$12 \,.\, 11 = 42 \,.\, 3 + 6 \quad (2$$
oder $12 \,.\, 24 = 42 \,.\, 6 + 12$, woraus folgt:
$x = 24$ und $z_1 = 6$, also $z = 6 - 14 = -8$, mithin $y = 8$.

Beispiel 3. Es sei die Gleichung $3x + y = 16$ aufzulösen, bei welcher der oben (160) bemerkte Umstand eintritt, dass $b = 1$ ist. Man transformire diese Gleichung in folgende: $y = -3x + 16$ und setze $-x = z$, so hat man:
$$y = 3z + 16 \text{ und } 16 = 3n + d \text{ giebt } n = 5;$$
$d = 1$. Setzt man daher $z = z_1 - 5$, so erhält man $y = 3z_1 + 1$. Die Verwandlung des Bruches $\frac{1}{3}$ in einen Systembruch von der Basis 1 hebt sich dadurch auf, dass ohne Weiteres die Divisionsgleichung
$$1 = 3 \,.\, 0 + 1 \text{ statt findet; welche mit}$$
$$y = 3 \,.\, z_1 + 1 \text{ verglichen, die Werthe } y = 1$$
und $z_1 = 0$, also $z = z_1 - 5 = -5$ giebt, folglich $x = 5$.

Beispiel 4. Wäre die Gleichung $13x + 17y = 100$ vorgelegt (welche für x und y in positiven ganzen Zahlen unmöglich ist), so würde man nach den vorigen Regeln keine entsprechende Divisionsgleichung erhalten.

VIII. Capitel.

Von den cyklischen Perioden.*)

§. 161. Sind mehrere getrennte Elementenreihen A, B, C etc., bei welchen die Elemente in natürlicher Ordnung auf einander folgen, gegeben, wie z. B.

(A) 1, 2, 3, ... α

(B) 1, 2, 3, ... β

(C) 1, 2, 3, ... γ u. s. f. und man schreibt dieselben in verticaler Linie so lange wiederholt unter einander, bis in einer Horizontalreihe die höchsten Elemente erscheinen, so heisst der Inbegriff dieser Complexionen eine cyklische Periode.

Das allgemeine Schema für eine solche Periode wäre demnach:

(A)	(B)	(C)	etc.
1	1	1	etc.
2	2	2	etc.
3	3	3	etc.
.	.	.	.
.	.	.	.
α	.	.	.
1	β	.	.
2	1	γ	.
3	2	1	etc.
.	3	2	.
.	.	3	.
.	.	.	.
α	.	.	.
1	β	.	.
2	1	γ	.
3	2	1	etc.
.	3	2	.
.	.	3	.
.	.	.	.
.	.	.	.
etc.	etc.	etc.	etc.
.	.	.	.
.	.	.	.
α	β	γ	

*) Ueber die cyklischen Perioden hat zuerst Hindenburg im Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathem. 3tes Stück 1786. einen lehrreichen Aufsatz geschrieben.

So würde z. B. für die Reihen (A) 1, 2; (B) 1, 2, 3; (C) 1, 2, 3, 4 folgende Periode stattfinden:

1	1	1
2	2	2
1	3	3
2	1	4
1	2	1
2	3	2
1	1	3
2	2	4
1	3	1
2	1	2
1	2	3
2	3	4

Die erste Complexion ist 111, die höchste 234.

§. 162. Die einzelnen Verticalreihen A, B, C etc. bezeichnet man nach Hindenburg sehr passend durch die höchsten in ihnen vorkommenden Elemente. So heisst A die Reihe α; B die Reihe β; C die Reihe γ u. s. w.

Beispiel 1. Für $\alpha = 2$; $\beta = 3$; $\gamma = 5$.

(1)	1	1	1	(11)	1	2	1	(21)	1	3	1
(2)	2	2	2	(12)	2	3	2	(22)	2	1	2
(3)	1	3	3	(13)	1	1	3	(23)	1	2	3
(4)	2	1	4	(14)	2	2	4	(24)	2	3	4
(5)	1	2	5	(15)	1	3	5	(25)	1	1	5
(6)	2	3	1	(16)	2	1	1	(26)	2	2	1
(7)	1	1	2	(17)	1	2	2	(27)	1	3	2
(8)	2	2	3	(18)	2	3	3	(28)	2	1	3
(9)	1	3	4	(19)	1	1	4	(29)	1	2	4
(10)	2	1	5	(20)	2	2	5	(30)	2	3	5

Beispiel 2. Es soll die cykl. Periode für $\alpha = 2$; $\beta = 3$; $\gamma = 4$; $\delta = 6$ und $\varepsilon = 12$ gebildet werden.

(1)	1	1	1	1	1
(2)	2	2	2	2	2
(3)	1	3	3	3	3
(4)	2	1	4	4	4
(5)	1	2	1	5	5
(6)	2	3	2	6	6
(7)	1	1	3	1	7
(8)	2	2	4	2	8
(9)	1	3	1	3	9
(10)	2	1	2	4	10
(11)	1	2	3	5	11
(12)	2	3	4	6	12

Die in Klammern beigefügten Zahlen sind die **Ordnungszahlen** der nebenstehenden Complexionen; sie zeigen an, die wie vielste in der Ordnung jede Complexion in ihrer Periode sei.

§. 163. **Aufgabe.** Eine cyklische Periode für die gegebenen Reihen:

$$\begin{array}{ll} 1, 2 & = \alpha \\ 1, 2, 3 & = \beta \\ 1, 2, 3, 4, 5 & = \gamma \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ll} 1, 2 & = \alpha \\ 1, 2, 3 & = \beta \\ 1, 2, 3, 4 & = \gamma \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6 & = \delta \end{array}$$

involutorisch zu entwickeln.

Auflösung.*)

1) Man schreibe die Elemente der ersten Reihe nach einander in die Tiefe.
2) Daneben schreibe man die 2te Reihe 1 . . . . . . β, und wiederhole beide Reihen so oft neben einander, bis man auf die Complexion $\alpha\beta$ kommt; so hat man die Periode für die zwei Reihen α und β.
3) Neben die Periode dieser 2 Reihen schreibe man von oben herunter die 3te Reihe 1 . . . . . γ, und wiederhole die vorige Periode der zwei ersten Reihen nebst der dritten Reihe so oft, bis man auf die Complexion $\alpha\beta\gamma$ kommt; so ist die Periode dieser drei Reihen geschlossen.
4) Dasselbe Verfahren wiederhole man so viele Male, als Reihen gegeben sind.

(α)	(β)	(γ)	
1	1	1	(1)
2	2	2	(2)
1	3	3	(3)
2	1	4	(4)
1	2	5	(5)
2	3	1	(6)
1	1	2	(7)
2	2	3	(8)
1	3	4	(9)
2	1	5	(10)
1	2	1	(11)
2	3	2	(12)
1	1	3	(13)
2	2	4	(14)
1	3	5	(15)
2	1	1	(16)
1	2	2	(17)

(α)	(β)	(γ)	(δ)	
1	1	1	1	(1)
2	2	2	2	(2)
1	3	3	3	(3)
2	1	4	4	(4)
1	2	1	5	(5)
2	3	2	6	(6)
1	1	3	1	(7)
2	2	4	2	(8)
1	3	1	3	(9)
2	1	2	4	(10)
1	2	3	5	(11)
2	3	4	6	(12)

*) Nach Weingärtner (Combinatorische Analysis. Th. I. Leipzig, 1800).

2	3	3	(18)
1	1	4	(19)
2	2	5	(20)
1	3	1	(21)
2	1	2	(22)
1	2	3	(23)
2	3	4	(24)
1	1	5	(25)
2	2	1	(26)
1	3	2	(27)
2	1	3	(28)
1	2	4	(29)
2	3	5	(30)

Anmerk. Es ist einleuchtend, dass jede geschlossene Periode, sobald man in den einzelnen Verticalreihen die zugehörigen Elemente von neuem wieder unter einander schreibt, auch wieder von neuem beginnen und so fort in's Unendliche wiederholt werden könne.

§. 164. Zusatz 1. Man kann die Perioden anstatt in die Tiefe ebenso gut horizontal hinter einander schreiben. z. B. für die Reihen 1, 2, 3
1, 2, 3, 4
1, 2, 3, 4, 5, 6 erhielte man folgende Complexionen:

1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3
1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4
1 2 3 4 5 6 1 2 3 4 5 6 ; es lassen sich aber offenbar die Perioden auf jene Art bequemer schreiben.

§. 165. Zusatz 2. Die Complexionen einer cyklischen Periode haben Verwandtschaft mit Variationsformen; in gewissen Fällen sind beide ganz einerlei, wenn nämlich die höchsten Elemente der Reihen Primzahlen zu einander sind. Nur folgen die einzelnen Complexionen nicht in derselben Ordnung auf einander.

Man habe z. B. aus den Reihen 1, 2
1, 2, 3
1, 2, 3, 4, 5
eine cyklische Periode zu bilden, so geschieht dies durch Hülfe der Variation auf folgende Art: man variire nämlich die Elemente dieser Reihen unmittelbar, ohne Index, alsdann entstehen die Formen:

$$\left.\begin{matrix}111\\112\\113\\114\\115\\121\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}122\\123\\124\\125\\131\\132\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}133\\134\\135\\211\\212\\213\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}214\\215\\221\\222\\223\\224\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}225\\231\\232\\233\\234\\235\end{matrix}\right\}$$

Die Anzahl dieser Formen ist $= 2 . 3 . 5 = 30$, und vergleicht man dieselben mit der in 162. Beisp. 1, entwickelten Reihe, so ergiebt sich völlige Uebereinstimmung.

Ganz anders verhält es sich aber bei dem 2ten Beispiele in 163, wo die Reihen (1, 2); (1, 2, 3); (1, 2, 3, 4); und (1, 2, 3, 4, 5, 6) gegeben sind; denn die Variation der Elemente dieser Reihen giebt $2 . 3 . 4 . 6$ d. i. 144 Complexionen, während die cyklische Periode nur deren 12 zählt.

§. 166. **Lehrsatz** I. Bei einer cyklischen Periode, deren höchsten Elemente, die Zahlen α, β, γ, δ etc., keine gemeinschaftlichen Factoren haben, oder welche prim unter sich sind, ist die Anzahl aller möglichen Complexionen das Product aus den grössten Zahlen, d. i. $= \alpha\beta\gamma\delta \ldots$

II. In den cyklischen Perioden aber, deren Zahlen α, β, γ, δ etc. gemeinschaftliche Factoren haben, ist die Anzahl aller Complexionen der kleinste Dividuus dieser Zahlen.

Beweis. Es bestehe zunächst eine Periode aus 2 Reihen A und B, deren erste z. B. 3 und deren 2te 5 Elemente enthalte; so ist klar, dass wenn die 3 Complexionen der ersten Periode 5mal wiederholt werden, ihre Anzahl ebenso gross sein muss, als wenn die 5 Complexionen der 2ten dreimal auf einander folgen, dass also die ganze Periode aus 3×5 d. i. 15 Complexionen bestehe. Nun trete noch eine Reihe C mit 7 Elementen hinzu, so folgt, dass wenn jene 15 Complexionen 7mal in die Tiefe gesetzt werden, diese 7 Compl. dagegen sich 15mal wiederholen lassen, da $15 \times 7 = 7 \times 15 = 105$ ist. Die gesammte Anzahl aller Complexionen aus den drei Reihen ist demnach durch das Product ihrer höchsten Elemente ausgedrückt $= 3 . 5 . 7$. Man sieht leicht ein, dass dieselben Schlüsse allgemein gelten, so viele Reihen auch vorkommen mögen. Hat daher die Reihe A α Elemente, die Reihe B β und die Reihe C deren γ etc., so giebt das Product $\alpha . \beta . \gamma$ die Menge aller Complexionen an.

II. Gesetzt *A* habe 8 und *B* 12 Elemente, so würden die 8 Complexionen der Reihe *A* 3 mal wiederholt ebenso viele neue geben, als die 12 Complexionen der Reihe *B* 2 mal wiederholt, nämlich 24. Es ist aber 24 der kleinste Dividuus der Zahlen 8 und 12. Auf diese Art kann man weiter schliessen bei 3 und mehreren Reihen. Hätte man z. B. 4 Reihen von 4, 6, 9, 10 Elementen, so würde die Anzahl aller Complexionen hieraus sein = 180, und 180 ist der kleinste Dividuus für die Zahlen 4, 6, 9, 10.

So ist z. B. für die Reihen

(α)	(β)	(γ)
1	1	1
2	2	2
	3	3
		4
		5

die Anzahl aller Complexionen = 2 . 3 . 5 = 30.

Für die Reihen:

(α)	(β)	(γ)	(δ)
1	1	1	1
2	2	2	2
	3	3	3
		4	4
			5
			6

findet man die Anzahl aller Complexionen:

$$\begin{array}{r|l} 2) & 2,\ 3,\ 4,\ 6 \\ \hline 3) & 3,\ 2,\ 3 \\ \hline & 2 \end{array}$$

$$2 \times 3 \times 2 = 12.$$

§. 167. Aus dem Bildungsgesetze der cyklischen Perioden gehen folgende Sätze hervor:

1) Allen Complexionen, welche aus lauter gleichen Zahlen oder Elementen bestehen, entspricht dieselbe Ordnungszahl, welche mit dieser Zahl gleich ist.

Z. B. Für die Compl. 1 1 1 1 ist die Ordn.-Zahl = 1
„ „ „ 2 2 2 2 „ „ „ „ = 2
„ „ „ 3 3 3 3 „ „ „ „ = 3
. . . .
. . . .
„ „ „ *n n n n* „ „ „ „ = *n*

2) Kommen in einer Complexion ungleiche Zahlen vor, so rühren diese von der Wiederholung der ungleichen Reihen ($\alpha, \beta, \gamma \ldots$) her und geben die einzelnen Zahlen nur die Ueberschüsse über die Ein- oder Vielfachen der Reihenzahlen an.

So zeigt z. B. für den Index

(3) (5) (7)

die Complexion 2, 4, 3, an, dass die 1ste Reihe schon 1 mal wenigstens durchlaufen ist, dass die 2te schon 2 mal repetirt ist u. s. w.

3) Um zu einer gegebenen Complexion, z. B. der n^{ten}, die nächst $\left\{\begin{matrix}\text{höhere}\\ \text{niedrigere}\end{matrix}\right.$ zu finden, braucht man nur $\left\{\begin{matrix}\text{zu}\\ \text{von}\end{matrix}\right.$ ihr die erste zu $\left\{\begin{matrix}\text{addiren}\\ \text{subtrahiren}\end{matrix}\right.$; dadurch erhält man die $n \pm 1^{ste}$ Complexion der Periode.

Ist z. B. für	(3)	(5)	(7)		
	2,	4,	3,	die n^{te}	Compl.
so ist	3,	5,	4,	„ $n+1^{ste}$	„
und	1,	3,	2,	„ $n-1^{ste}$	„

Sei die n^{te}	Compl.	2,	4,	3.	Addirt man dazu
die m^{te}	„	3,	3,	3,	so erhält man
die $n+m^{te}$	„	5,	7,	6.	

Uebersteigt dabei die Summe die Reihenzahlen $\alpha, \beta, \gamma \ldots .$, so hat man nur nöthig, letztere davon abzuziehen, oder jede einzelne Summe durch ihre zugehörige Reihenzahl zu dividiren und den Rest zu setzen, wobei für jede Summe, die ein Vielfaches dieser Zahl ist, die Zahl selbst gesetzt werden muss.

Wollte man z. B.

		(3)	(4)	(5)	(7)	
von der 19ten	Compl.	1,	3,	4,	5	abziehen
die 11te	„	2,	3,	1,	4,	so würde man erhalten
die 8te	„	2,	4,	3,	1,	indem hier 2 von 1 nicht

abgezogen werden kann, so borgt man von der Reihenzahl $\alpha = 3$, oder, wenn diese nicht hinreicht, von einem Vielfachen derselben; da 3 von 3 den Rest 0 giebt, so setzt man dafür die Reihenzahl 4.

		(3)	(4)	(5)	(7)
Z. B. Von der m^{ten}	Compl.	1,	2,	1,	4
abgezogen die 12te	„	12,	12,	12,	12
„ bleibt die $m-12^{te}$	„	1,	2,	4,	6.

4) Es ist leicht, zu einer gegebenen Complexion von der Ordnungszahl n die $2n^{te}$, $3n^{te}$ etc. zu finden; man braucht nur jede Zahl der Compl. mit 2, 3, 4 etc. zu multipliciren, und sobald das Product die Reihenzahl übersteigt, den Rest aus der Division des Productes mit der Reihenzahl zu setzen.

	(3)	(4)	(5)	(7)					
Wenn z. B. die n^{te} Compl. =	3,	1,	4,	2					
so ist „ $2n^{te}$ „ =	6,	2,	8,	4	oder	3,	2,	3,	4,
„ $3n^{te}$ „ =	9,	3,	12,	6	„	3,	3,	2,	6,
„ $4n^{te}$ „ =	12,	4,	16,	8	„	3,	4,	1,	1,

u. s. w.

5) Auch können beliebige Complexionen einer Periode sowohl addirt als subtrahirt werden, wodurch wieder Complexionen entstehen, deren Ordnungszahl durch die Summe oder Differenz von jenen bestimmt wird.

So ist z. B. Für

(m)	1,	3,	1
(n)	1,	1,	5
(r)	2,	1,	3
$(m+n+r)$	2,	2,	4

und

(m)	1,	3,	1,	3,	9
(r)	1,	2,	3,	5,	11
$(m-r)$	2,	1,	2,	4,	10.

Ferner für	(3)	(4)	(5)	(7)	
sei m =	1,	3,	2,	7	(7)
n =	1,	4,	4,	4	(4)
p =	3,	1,	4,	2	(9)
so ist $(m+n+p)$ =	5,	8,	10,	13	
d. i.	2,	4,	5,	6	(20)

	(3)	(4)	(5)	(7)	
Wäre die m^{te} Compl. =	2,	1,	1,	6	(41)
und „ n^{te} „ =	1,	4,	3,	7	(28)
so ist $(m-n)$ =	1,	1,	3,	6	(13)

6) Nach 3, 4, 5. sind wir daher im Stande, aus einer gegebenen Complexion die unmittelbar vorhergehende oder folgende sowohl, als auch die n^{te} vorhergegangene oder nachfolgende zu finden; diess beweist zugleich die grosse Einfachheit, welche im Bau solcher Perioden herrscht.

7) Da eine geschlossene cyklische Periode beliebig oft wiederholt werden kann, so ist die Frage nach einer Complexion, welche die Anzahl aller $(\alpha.\beta.\gamma.\delta)$ in der ersten übersteigt, nicht ungereimt, sondern lässt sich eben so leicht als jede andere im 1sten Cyclus bestimmen. Man kann sich dabei die Perioden

entweder in die Tiefe geschrieben, oder im Kreise herum vorstellen, analog der Kreiseintheilung, wo man z. B. von 360° so gut als 560° durch drehende Bewegung einer Radiuslinie sprechen kann. Eine cyklische Periode kann daher ebensowohl eine endliche, als unendliche sein.

8) Da man die Verticallinie sowohl abwärts als aufwärts zählen, und im Kreise nach der rechten oder linken Seite herumgehen kann, so erhält eine Complexion von negativer Ordnungszahl ebenfalls Bedeutung.

Zieht man z. B. von der 7ten Compl. = 1, 3, 2, 7
ab die 9te „ = 3, 1, 4, 2

so bleibt die —2te „ = 1, 2, 3, 5.

Ferner ist die 6te Compl. = 3, 2, 1, 6
und die 10te „ = 1, 2, 5, 3

folglich die —4te „ = 2, 4, 1, 3, wie man dieses auch aus folgendem Schema ersieht, wo die Periode über der horizontalen Scheidungslinie aufwärts in's Negative fortgesetzt ist.

	.	.	.	.	
	.	.	.	.	
(—4)	2	4	1	3	
(—3)	3	1	2	4	
(—2)	1	2	3	5	
(—1)	2	3	4	6	
(0)	3	4	5	7	oder 0, 0, 0, 0.
(1)	1	1	1	1	
(2)	2	2	2	2	
(3)	3	3	3	3	
(4)	1	4	5	6	
(5)	2	1	1	7	
	.	.	.	.	
	.	.	.	.	
	.	.	.	.	

Es harmonirt also die 0te Complexion mit der letzten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; die —1ste mit der vorletzten u. s. w. Demnach können negative Ordnungszahlen durch Addition der Ein- oder Vielfachen von der Complexionszahl auf die kleinsten positiven Ordnungszahlen reducirt werden.

9) Bezeichnet man die Ordnungszahl der höchsten (letzten) Complexion mit p und wird

addirt	subtrahirt
zu der 0ten Compl. 0, 0, 0	von der p^{ten} Compl. $= \alpha, \beta, \gamma$ . .
1, 1, 1	1, 1, 1, so entsteht
so entsteht die (1) 1, 1, 1	die $(p-1)^{te}$ „ $\alpha-1, \beta-1, \gamma-1$,
dazu 1, 1, 1	davon wieder ab 1, 1, 1
giebt die (2) 2, 2, 2	$p-2^{te}$ Compl. $\alpha-2, \beta-2, \gamma-2$.
u. s. f.	u. s. f.

Es giebt also die 2te Compl. und die $p-2^{te}$ wieder die p^{te} und man sieht daraus, dass jede zwei Complexionen, deren Ordnungszahlen sich zur Summe p ergänzen, bei ihrer Addition stets die letzte Complexion geben.

Für $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$ ist $p = 2.3.5 = 30$.

Nun ist die 23te Compl.	=	1, 2, 3
und „ 7te „	=	1, 1, 2
folgl. ist „ 30ste „	=	2, 3, 5

(α) (β) (γ) (δ)

10) Sei a, b, c, d, irgend eine Complexion; setzt man dazu, oder nimmt davon die Reihenzahlen α, β, γ, δ, oder beliebige Vielfache $m\alpha$, $n\beta$, $p\gamma$, $q\delta$, nach der Ordnung, so bleiben die gleichnamigen Reihen α, β, γ, δ, ungeändert. z. B.:

	(3)	(4)	(5)	(7)					
zu	3,	1,	4,	2	zu	a,	b,	c,	d
add.	6,	12,	5,	28		$\pm m\alpha$,	$\pm\beta$,	$\pm\gamma$,	$\pm q\delta$
giebt:	3,	1,	4,	2.	giebt:	a,	b,	c,	d.
subtr.	3,	1,	4,	2.					

Ferner ist die Addition von

$$\begin{array}{ccc} (\alpha) & (\beta) & (\gamma) \\ a, & \beta, & \gamma \\ \alpha, & b, & \gamma \\ \alpha, & \beta, & c \\ \hline a, & b, & c \end{array} \quad \text{einerlei mit} \quad \begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \hline a, & b, & c \end{array}$$

So ist z. B. für

(3)	(4)	(5)	(7)
2	3	1	4
9	4	5	7
3	8	5	7
3	4	15	7
3	4	5	28
20,	23,	31,	53
oder 2,	3,	1,	4.

Es ist einleuchtend, dass die Compl. 1, β, γ, δ, α mal zu sich selbst addirt, geben wird α, β, γ, δ, wie dieses aus dem Vorhergehenden sich leicht ergiebt.

§. 168. **Aufgabe.** Aus der gegebenen Ordnungszahl einer Complexion in einer cyklischen Periode die zugehörige Complexion dieser Periode zu finden.

Auflösung. Man dividire die gegebene Ordnungszahl durch das höchste Element α, β, γ . . . jeder einzelnen Periode nach der Reihe, so geben die Reste allemal die verlangte Complexion. Findet sich der Rest 0, so wird dafür der Divisor beibehalten.

Der Grund dieses Verfahrens ergiebt sich leicht aus §. 167. 2 und dem Vorhergehenden.

Einige Beispiele zur Erläuterung.

1) Es sei $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$; man verlangt die 12te Complexion.

	2|12|6	3|12|4	4|12|3
	12	12	12
	0	0	0
oder	2	3	4

Die gesuchte Compl. ist also 2, 3, 4.

2) Man verlangt die 7te Complexion.

2|7|3	3|7|2	4|7|1
6	6	4
1	1	3

Diese Compl. ist: 1, 1, 3.

Obgleich die vorstehende Periode nur 12 Complexionen hat, so kann man sich doch dieselbe so oft repetirt denken, als man will. Deshalb gehen auch die Ordnungszahlen in's Unendliche fort und es ist keineswegs ungereimt, z. B. nach der 1000sten Complexion zu fragen.

3) Man verlangt von obiger Periode die 17te Compl.

2|17|8	3|17|5	4|17|4
16	15	16
1	2	1

Die Compl. ist also 1, 2, 1.

4) Es werde für $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 5$ und $\delta = 7$ die 10te Compl. gesucht.

10 : 3 giebt den Rest 1
10 : 4 - - - 2
10 : 5 - - - 5
10 : 7 - - - 3, daher ist die 10te Compl.
= 1, 2, 5, 3.

5) Hindenburg giebt für $\alpha = 15$, $\beta = 19$, $\gamma = 28$ die 6472ste Compl. = 7, 12, 4, an. Ist das richtig?

Man erhält hier 6472 : 15 mit dem Reste 7
6472 : 19 - - - 12
6472 : 28 - - - 4.

Es ist demnach diese Compl. = 7, 12, 4.

Anmerkung. Wenn man bei der Division der Ordnungszahl durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ die Quotienten grösser nimmt als gewöhnlich, so werden die Reste, also auch die Elemente der Complexion negativ; allein man kann dieselben leicht auf positive reduciren, sowie auch etwaige negative Ordnungszahlen (§. 167. 8).

Nehmen wir das vorige 3te Beispiel, wo die 17te Complexion verlangt wird und dividiren wie folgt:

$$2|17|9 \qquad 3|17|7 \qquad 4|17|5$$
$$\underline{18} \qquad \underline{21} \qquad \underline{20}$$
$$-1 \qquad -4 \qquad -3$$

Dann wird die Reduction dieser negativen Reste auf die zugehörigen kleinsten positiven, durch Addition der ein- oder vielfachen Divisoren hergestellt.

Man addire daher zu -1, -4, -3
$\quad 2, \quad 6, \quad 4$

Dann erhält man wieder $1, \; 2, \; 1$ die 17te Compl. wie zuvor.

§. 169. **Aufgabe.** Von einer cyklischen Periode ist eine Complexion gegeben; man soll angeben, die wie vielste sie sei; d. h. ihre entsprechende Ordnungszahl bestimmen, wenn die Reihenzahlen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ relativ prim sind.

Auflösung. 1) Sei die gegebene Complexion a, b, c, d, so kann man sich dieselbe vorstellen als den Inbegriff der Complexionen:

$$\begin{array}{cccc} a, & \beta, & \gamma, & \delta \\ \alpha, & b, & \gamma, & \delta \\ \alpha, & \beta, & c, & \delta \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & d \\ \hline a, & b, & c, & d \end{array} \quad \text{(nach §. 167. 10).}$$

2) Statt dessen kann auch die gegebene Compl. a, b, c, d durch die Addition

$$\text{der Compl.}\left(\begin{matrix}1, & \beta, & \gamma, & \delta \\ \alpha, & 1, & \gamma, & \delta \\ & \text{u. s. w.} & & \end{matrix}\right. \quad \text{oder}\left(\begin{matrix}m, & \beta, & \gamma, & \delta \\ \alpha, & n, & \gamma, & \delta \\ & \text{u. s. w.} & & \end{matrix}\right.$$

beliebig verändert werden, um dadurch zu anderen Complexionen zu gelangen, deren Ordnungszahl bekannt ist, wie z. B. m, m, m, m oder $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und andere.

3) Wären daher die Ordnungszahlen solcher Hülfscomplexionen, wie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$
oder $1, \beta, \gamma, \delta$
oder m, β, γ, δ bekannt, so würde man aus diesen in beiden Fällen die Ordnungszahl der Complexion a, b, c, d, finden können.

4) Es ist klar, dass die Zahlen β, γ, δ .. mit einander verbunden nur in den Complexionen der Periode vorkommen können, deren Ordnungszahl $= 1.\beta\gamma\delta$, oder $2\beta\gamma\delta$, oder $3\beta\gamma\delta$ etc. ist (s. vor. Lehrsatz) und, da unter diesen auch die Compl. a, β, γ, δ mit vorkommen muss, so sei die Ordnungszahl dieser Compl. $= x\beta\gamma\delta$, wo dann x zu bestimmen ist.

Wäre z. B. für (2) (3) (5) die gegebene
Compl.: 1 2 1,
so folgt, dass die Ordnungs-Zahl von 1, 3, 5 entweder die 15te oder 2.15^{te} sein muss; denn wenn der
2te Cyclus 5 mal wiederholt ist, so ist offenbar
der 3te - 3 - -
Es ist also 1, 3, 5 die 15te Compl., da die $30^{ste} = 2, 3, 5$ sein muss.

5) Haben nun $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ keinen gemeinschaftlichen Factor, wie vorausgesetzt ist, so kann α in $\beta\gamma\delta$ nicht aufgehen.

Giebt also $\dfrac{\beta\gamma\delta}{\alpha}$ den Rest a_1,

so lässt $\dfrac{x.\beta\gamma\delta}{\alpha}$ - - xa_1.

Für die Compl. a, β, γ, δ giebt aber

$\dfrac{x.\beta\gamma\delta}{\alpha}$ den Rest a (§. 167. 2. und §. 168.),

so muss auch $\dfrac{xa_1}{\alpha}$ den Rest a lassen.

Setzt man also $xa_1 = \alpha A + a$, so ist

$x = \frac{\alpha A + a}{a_1}$ ein Ausdruck, in welchem für A jede $\pm$ Zahl, selbst 0 gesetzt werden kann, damit x, d. i. $\frac{\alpha A + a}{a_1}$ eine ganze Zahl wird.

Demnach kann die Ordnungszahl der Complexion a, β, γ, δ ausgedrückt werden durch $\frac{\alpha A + a}{a_1} . \beta\gamma\delta$.

6) Setzt man auf eben die Art, wie in 4 und 5,

für $\frac{\alpha\gamma\delta}{\beta}$ den Rest b_1

- $\frac{\alpha\beta\delta}{\gamma}$ - - c_1

- $\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta}$ - - d_1

und bedient sich dabei der Hülfsgrössen B, C, D, so kann man die Ordnungszahlen der übrigen Hülfscomplexionen α, b, γ, δ, α, β, c, δ, α, β, γ, d darstellen.

7) Nach 5 und 6. erhält man also

die Ordnungszahlen entsprechend den Complexionen

$\frac{\alpha A + a}{a_1} . \beta\gamma\delta$ — a, β, γ, δ

$\frac{\beta B + b}{b_1} . \alpha\gamma\delta$ — $\alpha, b, \gamma, \delta$

$\frac{\gamma C + c}{c_1} . \alpha\beta\delta$ — α, β, c, δ

$\frac{\delta D + d}{d_1} . \alpha\beta\gamma$ — α, β, γ, d

Addirt man nun zu beiden Seiten, so ergiebt sich (§. 167. 5. 10) die Ordnungszahl

$$\left[\frac{\alpha A + a}{a_1}\beta\gamma\delta + \frac{\beta B + b}{b_1}\alpha\gamma\delta + \frac{\gamma C + c}{c_1}\alpha\beta\delta + \frac{\delta D + d}{d_1}\alpha\beta\gamma\right]$$

für die Complexion a, b, c, d.

Die Werthe von A, B, C, D, werden hier wie in 5 bestimmt mit den kleinsten positiven Werthen von x.

Anm. Ausser dieser Auflösung, nach welcher für jede gegebene Complexion $abcde$ .... ihre Ordnungszahl unmittelbar gefunden werden kann, giebt Hindenburg noch zwei andere, deren

letzte darin besteht, die gesuchte Ordnungszahl durch Hülfscomplexionen zu finden. Die erhaltenen Ordnungszahlen übersteigen oft das grösste Product $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots = P$ oder die Complexionszahl der Periode; in diesem Falle braucht man nur die gefundene Zahl durch P zu dividiren und den kleinern Rest für die gesuchte Zahl zu nehmen.

§. 170. Wir wollen diese Vorschrift auf ein Paar Beispiele anwenden.

1) Aus der Periode $\alpha = 3$; $\beta = 4$; $\gamma = 5$; $\delta = 7$ ist die Compl. 2, 3, 5, 7 gegeben. Die wie vielste ist es?

Hier ist nun

$$\frac{\beta.\gamma.\delta}{\alpha} \text{ d. i. } \frac{4.5.7}{3} = \frac{140}{3} \text{ mit dem Reste} = 2$$
$$\frac{\alpha.\gamma.\delta}{\beta} \quad - \quad \frac{3.5.7}{4} = \frac{105}{4} \quad - \quad - \quad - \quad = 1$$
$$\frac{\alpha.\beta.\delta}{\gamma} \quad - \quad \frac{3.4.7}{5} = \frac{84}{5} \quad - \quad - \quad - \quad = 4$$
$$\frac{\alpha.\beta.\gamma}{\delta} \quad - \quad \frac{3.4.5}{7} = \frac{60}{7} \quad - \quad - \quad - \quad = 4. \text{ Folglich}$$

$$\frac{\alpha A + a}{a_1}.\beta\gamma\delta \text{ d. i. } \frac{3A+2}{2}.140 = 140 \text{ für } A = 0$$
$$\frac{\beta B + b}{b_1}.\alpha\gamma\delta \quad - \quad \frac{4B+3}{1}.105 = 315 \quad - \quad B = 0$$
$$\frac{\gamma C + c}{c_1}.\alpha\beta\delta \quad - \quad \frac{5C+5}{4}.\ 84 = 420 \quad - \quad C = 3$$
$$\frac{\delta D + d}{d_1}.\alpha\beta\gamma \quad - \quad \frac{7D+7}{4}.\ 60 = 420 \quad - \quad D = 3.$$
$$\overline{1295}$$

Diese Summe durch 3.4.5.7 oder 420 dividirt, giebt den Rest 35; es ist also 2, 3, 5, 7 die 35[te] Compl.

2) Von der Periode $\binom{\alpha}{15}\binom{\beta}{19}\binom{\gamma}{28}$ ist gegeben die Complexion 7, 18, 4; man sucht die Ordnungszahl. Hier findet man zunächst

$$\frac{19.28}{15} \text{ mit dem Reste } 7$$
$$\frac{15.28}{19} \quad - \quad - \quad - \quad 2$$
$$\frac{15.19}{28} \quad - \quad - \quad - \quad 5. \text{ Es ist daher}$$

$$\frac{15A+7}{7}.19.28 = 532 \text{ für } A = 0$$
$$\frac{19B+12}{2}.15.28 = 2520 \text{ - } B = 0$$
$$\frac{28C+4}{5}.15.19 = 3420 \text{ - } C = 2$$
$$\overline{6472}$$

Es ist demnach 7, 12, 4 die 6472ste Complexion.

§. 171. **Aufgabe.** Die Ordnungszahl einer gegebenen Complexion a, b, c, d, e . . einer cyklischen Periode zu finden, wenn unter den Reihenzahlen solche mit vorkommen, welche ein gemeinschaftliches Mass haben.

Auflösung. Es lassen sich hierbei mehrere Fälle unterscheiden. Kommen nämlich

1) in der Complexion lauter gleiche Zahlen vor, wie m, m, m . . . ., so ist sie offenbar die m^{te}.

2) Befindet sich unter den Zahlen α, β, γ, δ . . . deren kleinster Dividuus, so stimmt die Ordnungszahl der gegebenen Complexion mit der Zahl in ihr überein, welche zu der Reihe gehört, die den kleinsten Dividuus mit enthält.

So ist z. B. die Compl. $\overset{(2)}{1}, \overset{(3)}{1}, \overset{(4)}{3}, \overset{(6)}{1}, \overset{(12)}{7},$ die 7te in der Ordnung, weil hier 7 zu 12 dem kl. Dividuus der übrigen Zahlen 2, 3, 4, 6 gehört.

3) Kommt unter den Zahlen α, β, γ, δ . . . der kleinste Dividuus selbst nicht mit vor, ist aber ein Product zweier oder mehrerer Factoren aus ihnen, ohne gemeinschaftliches Mass, so richtet sich die Ordnungszahl der gegebenen Compl. bloss nach den Zahlen in ihr, die sich auf diese Factoren beziehen.

Um z. B. die Ordnungszahl der Compl. $\overset{(2)}{1}, \overset{(3)}{1}, \overset{(4)}{3}, \overset{(6)}{1},$ zu finden, braucht man nur die Ordnungszahl für eine Compl. wie $\overset{(3)}{1}, \overset{(4)}{3},$ zu suchen. Nach (§. 169. 7.) erhält man $\frac{3A+1}{1}.4 + \frac{4B+3}{3}.3 = 4+3 = 7$, für $A = B = 0$. Also ist auch 1, 1, 3, 1 die 7te Compl.

4) Ueberhaupt, wenn die Zahlen α, β, γ, δ . . . keine Primzahlen unter sich sind, so kann es doch durch Divisionen mit ge-

meinschaftlichen Factoren jederzeit dahin gebracht werden, dass man relative Primzahlen erhält, deren Product den kleinsten Dividuus giebt. Die so abgekürzten Zahlen nehme man statt der gegebenen Reihen- oder Cykelzahlen an, und suche für ihren Cykel die Ordnungszahl der gegebenen Compl. nach §. 169, die man aber, wenn sie gefunden ist, nach §. 168. noch prüfen muss.*)

Für das Beispiel $\begin{matrix}(12) & (15) & (20) & (24) & (36)\\ 5 & 14 & 9 & 17 & 5\end{matrix}$ ist der kleinste Dividuus 5 . 8 . 9 (= 360) in seine drei relativen Primzahlen zerlegt, welche als Factoren in den gegebenen Zahlen 20, 24, 36 enthalten sind. Man nehme daher statt des gegebenen Cykels den neuen an

$$\begin{matrix}(5) & (8) & (9)\\ 9 & 17 & 5\end{matrix} \quad \text{oder abgekürzt} \quad \begin{matrix}(5) & (8) & (9)\\ 4 & 1 & 5\end{matrix}$$
(nach §. 167. 3.)

für die beiden übrigen Zahlen (12) (15) sollte man 1, 1, setzen, d. i. man lässt sie einstweilen ganz weg.

Zu dieses Cykels Complexion 4, 1, 5 findet man die Ordnungszahl nach (§. 169). Es lassen nämlich

$\frac{8 . 9}{5}$ den Rest 2; $\frac{5 . 9}{8}$ den Rest 5; $\frac{5 . 8}{9}$ den Rest 4.

Daher wird die Ordnungszahl

$$\frac{5A+4}{2} . 8 . 9 + \frac{8B+1}{5} . 5 . 9 + \frac{9C+5}{4} . 5 . 8$$

(für $A = 0$, $B = C = 3$) $= 2 . 8 . 9 + 5 . 5 . 9 + 8 . 5 . 8 = 689$ und die kleinste $= 689 - 360 = 329$.

(Für $A = 0$, $C = 3$, $B = -2$ erhält man sogleich diese O.-Zahl.)

Beweis. Von den beiden Cykeln aus den Reihenzahlen

I) (20) (24) (36) und II) (5) (8) (9)

hat jede Periode des einen so viele, insgesammt verschiedene, Complexionen als die des andern. Dabei erhält man aus jeder Complexion *a*, *b*, *c* von I die gleichzählige Compl. in II, wenn man von jeder Zahl *a*, *b*, *c* der ersten, die zugehörige des abgekürzten

*) Statt des weitläufigeren Hindenburgischen Verfahrens ist hier (unter 4) der schöne Zusatz des M. Becker eingeschaltet, welchen derselbe im 2ten Bde, des Leipziger Archivs 8s Heft (1798) bekannt gemacht hat. Dadurch erhalten die Regeln des §. 169, indem sie auch diesen Fall umfassen, völlige Allgemeinheit.

Cykels aus 5, 8, 9 so oft als möglich abzieht, und bloss den Rest beibehält. Diess folgt aus der Construction beider Cykeln deutlich genug. Man halte nur ihre beiden ersten Columnen für 20 und 5 gegen einander (horizontal unter einander gesetzt)

1 2 3 4 5 6 7 8 . . . . . 15 16 17 18 19 20 | 1 2 . . .
1 2 3 4 5 1 2 3 . . . . . 5 1 2 3 4 5 | 1 2 . . .

In der ersten Columne zählt man bis 20 fort; in der andern nur bis 5, von den Zahlen über 5 behält man bloss die Reste. Und weil 20 ein Multiplum von 5 ist, so fallen beider Grenzen, 20 und 5, zusammen, und beide Columnen fangen zugleich wieder mit 1 an. Der allgemeine Ausdruck für die Ordnungszahl eines Gliedes aus der Reihe für 20 ist $20A + a$, der mit 20 dividirt den Rest a lässt; man dividire ihn mit 5, so bleibt kein anderer Rest als den a giebt. — Was bisher im Beispiele von 20 und 5 gesagt ist, gilt von jedem Paar Zahlen, deren eine ein Vielfaches der andern ist.

Ist also 9, 17, 5 eine Compl. von I, so ist auch 4, 1, 5 die ebenso vielste Compl. in II, deren Ordnungszahl man nach §. 169 findet.

Es giebt aber mehrere scheinbare Complexionen des Cykels I, die insgesammt die einzige Compl. 4, 1, 5 in II. bestimmen. Statt 4 könnte man die vier Werthe 4, 9, 14, 19 setzen; statt 1 die Zahlen 1, 9, 17; statt 5 die Zahlen 5, 14, 23, 32. Das gäbe zusammen $4 . 3 . 4 = 48$ Complexionen in I, aus welchen allen die einzige 4, 1, 5 in II folgte. Allein nur eine von ihnen kann im Cykel I vorkommen, die übrigen 47 sind falsch. Damit stimmt überein, dass das Product $20 . 24 . 36$ (die Anzahl aller Complexionen, wenn 20, 24, 36 relative Primzahlen wären) 48 mal so gross ist, als $5 . 8 . 9$ (die Anzahl der wirklichen Complexionen).

Deshalb muss man mit der gefundenen Ordnungszahl erst die Probe (§. 168) anstellen.

Diese Probe muss nicht bloss mit 20, 24, 36 vorgenommen werden, sondern auch mit den übrigen Zahlen 12 und 15, die bisher aus der Rechnung ganz wegfielen. Sie müssen für sich zur Rechnung passen, oder die Aufgabe ist unmöglich.

Statt nach (§. 168) die Probe durch die Division zu machen, vergleicht man von den Zahlen α, β, γ, δ . . . jede niedere nicht relative Primzahl mit der oder den höheren, die ihre gemeinschaftlichen Factoren erschöpfen, und untersucht bei jedem solchen

Paare, ob der Unterschied ihrer zugehörigen Reste denselben Theiler habe, wie die beiden Zahlen selbst; denn hierauf beruht die Möglichkeit der Auflösung. Z. B.:

12 wird mit 24 verglichen, worin es aufgeht; der Unterschied ihrer Reste 17 — 5 ist auch durch 12 theilbar.

$15 = 3 \cdot 5$ muss wegen des Theilers 3 mit 24; wegen des Faktors 5 mit 20 verglichen werden.

$20 = 4 \cdot 5$ wegen 4 mit 24; 5 ist kein Theiler einer folgenden Zahl.

24 mit 36; beide sind mit 12 theilbar, so auch 17 — 5.

Diese Probe kann man noch vor der Berechnung der Ordnungszahl vornehmen, damit man nichts Unmögliches suche.

Anmerkung. Nähme man willkührlich Zahlen als Elemente einer Complexion, deren Ordnungszahl man suchen wollte, welche zusammen nicht vorkommen können: so zeigen sich in den Formeln Ausdrücke für ganze Zahlen, die nie ganze Zahlen werden können.

§. 172. **Mechanische Auflösung dieser Aufgabe.** Da die Bestimmung der Ordnungszahl in der Anwendung cyklischer Perioden auf unbestimmte Gleichungen die Hauptrolle spielt, so fügen wir noch eine mechanische Regel bei, welche in den meisten Fällen, wo die gesuchte Ordnungszahl nicht zu gross ist, sehr prakticabel erscheint; auch ist es dabei einerlei, ob die Reihenzahlen α, β, γ ... Primzahlen zu einander sind oder nicht.

1) Sei von einer cykl. Periode, wo $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 5$, $\delta = 7$ die $x$te Complexion 1, 2, 5, 3 gegeben, so ist klar, dass das erste Element (1) dem ersten Cykel angehörig in der entwickelten Periode nur folgende Stellen einnehmen kann:

I. 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22 etc.

Ebenso kann das 2te Element der gegebenen Compl., nämlich (2), nur die Stellen haben:

II. 2, 6, 10, 14, 18, 22 etc.

Dann kann das dritte Element (5) nur die Plätze haben:

III. 5, 10, 15, 20, 25, 30 etc.

Endlich wird das vierte Element (3) der Compl. in der 4ten Reihe nur stehen können in der

IV. 3, 10, 17, 24, 31 etc. Stelle.

Da nun in diesen 4 Reihen einstimmig die 10te Compl. vorkömmt, so ist die gegebene Compl. nothwendig die 10te.

2) Wäre aus derselben Periode die Complexion gegeben:

3, 4, 3, 6,

so erhält man folgende Reihen:

I. 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, **48** ....
II. 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, **48** ....
III. 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, **48** ....
IV. 6, 13, 20, 27, 34, 41, **48** ....

woraus sich ergiebt, dass die gesuchte Compl. die 48ste ist.

Es entstehen also hierbei lauter arithmetische Progressionen, deren Anfangsglieder die einzelnen Elemente der Compl. sind, deren Exponenten aber durch die Reihenzahlen angegeben werden.

3) Gegeben: $\overset{(3)}{2},\ \overset{(4)}{4},\ \overset{(6)}{2},\ \overset{(9)}{5}$. Hier hat man

I. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, **32** ....
II. 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, **32** ....
III. 2, 8, 14, 20, 26, **32** ....
IV. 5, 14, 23, **32** .... Es ist also 2, 4, 2, 5 die 32ste Compl.

Offenbar ist jedes Glied der Reihe I unter der Formel $3A+2$; jedes Glied der Reihe II, unter $4B+4$; jedes der Reihe III. unter $6C+2$ und der IVten Reihe, unter $9D+5$ begriffen. Man erhält daher die Gleichungen:

$3A+2 = 4B+4 = 6C+2 = 9D+5$, aus welchen sich für $A=10$, $B=7$, $C=5$ und $D=3$ die Zahl 32 findet.

§. 173. Besteht die Periode nur aus zwei Reihen oder Cykeln, hat also die gegebene Complexion nur zwei Elemente, so erhalten die Formeln des §. 169. zur Berechnung der Ordnungszahl folgende einfache Gestalt.

Sei gegeben: $\overset{(\alpha)}{a}\ \overset{(\beta)}{b}$; dann bestimme man für $\frac{\beta}{\alpha}$ den Rest a_1

„ $\frac{\alpha}{\beta}$ „ „ b_1;

es ist daher

$\frac{\alpha A+a}{a_1}.\beta$ die Ordn.-Zahl entsprechend der Compl. $a\beta$

$\frac{\beta B+b}{b_1}.\alpha$ „ „ „ „ „ αb

und $\frac{\alpha A+a}{a_1}.\beta+\frac{\beta B+b}{b_1}.\alpha$ = der Ordn.-Zahl für ab.

Da in der Anwendung der cykl. Perioden dieser Fall am meisten vorkommt, so schien es nicht überflüssig, ihn besonders hervorzuheben.

IX. Capitel.

Anwendung der cyklischen Perioden auf die Auflösung unbestimmter Gleichungen.

§. 174. Es sei zuerst die Gleichung

$$ax - by = c$$

gegeben. Man betrachte a und c als eine Compl. von einer cyklischen Periode, wobei (a) und (b) angeben, aus wie vielen Zahlen jede Periode besteht, d. h. die Reihenzahlen sind, und suche die ihr entsprechende Ordnungszahl (Cap. VIII. §. 169.), so hat man einen Werth für ax oder $by + c$ gefunden.

Wäre die Gleichung $ax - by = -c$ gegeben, so kann man von dieser Form sogleich (durch Mult. mit -1) zu der:

$$-ax + by = c \text{ oder}$$

$$by - ax = c$$ übergehen. Es ändert also in der Auflösung nichts, wenn $-c$ statt $+c$ vorkommt.

Nach der mechanischen Regel §. 172. bilde man nun für

$$\frac{\begin{matrix}(a) & (b)\\ a & c\end{matrix}}{}$$ die Progressionen

$a,\ 2a,\ 3a,\ 4a\ \ldots.$

$c,\ c+b,\ c+2b,\ c+3b\ \ldots.$ und setze sie so lange fort, bis man zwei gleiche Glieder erhält, welche alsdann die Ordnungszahl angeben d. h. die wievielste Compl. a, c ist.

Wir wollen diese Methode sogleich auf besondere Fälle anwenden.

§. 175. Gegeben: $7x - 23y = 1$.

(7) (23)	
7 1	7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70 ....
	1, 24, 47, 70.

Da nun hier die Zahl 70 als ein gleiches Glied in beiden Reihen erscheint, so ist $7x = 23y + 1 = 70$, folglich:

$$x = 10$$

$$y = 3.$$ Diese Aufl. genügt der Gleich., denn es ist: $7(10) - 23(3) = 1$.

Beispiel 2. $21x - 8y = 1.$

21, 42, 63, 84, **105**, 126, 147 ....

1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, 65, 73, 81, 88, 97, **105**.

Es ist also: $21x = 8y + 1 = 105;$

daher $x = 5$ und $y = 13.$

Beispiel 3. $23x - 16y = 13.$

(23) (16)

23 13

I. 23, 46, 69, 92, 115, 138, 161, 184, 207, 230, **253**, 276 ....

II. 13, 29, 45, 61, 77, 93, 109, 125, 141, 157, 173, 189, 205, 221, 237, **253**, 269 ....

Demnach ist: $23x = 16y + 13 = 253;$

folglich: $x = 11$ und $y = 15.$

$$\begin{array}{r} 253 \\ 13 \\ \hline 240 \end{array} \qquad \frac{240}{16} = 15.$$

Beispiel 4. Welche Zahlen gehen durch 9 auf und lassen durch 14 dividirt 8 zum Reste?

Nach der Gleichung $9x = 14y + 8.$

(9) (14)

9 8

I. 9, 18, 27, **36**, 45 ....

II. 8, 22, **36**, 50 ....

Daher ist 36 die kleinste Zahl.

§. 176. Es sei nun die Gleichung $ax + by = c$ aufzulösen. Dann setze man, um diesen Fall auf den vorigen zurückzuführen,

$ax - (-by) = c$ oder

$ax = -by + c$ und verfahre dann, wie vorhin. Es sei z. B. gegeben:

1) $3y + 5z = 60$, so schreibe man

$3y = -5z + 60$ und man hat nun für

(3) (5)

0 60 oder

3 5. Die entsprechende Ordnungszahl findet sich:

I. 3, 6, 9, 12, **15**, 18, 21, 24 ....

II. 5, 10, **15**, 20, 25 ....

Es ist demnach: $3y = 15$, folglich $y = 5$

$15 = -5z + 60$ oder

$$3 = - \quad z + 12$$
$$z = 12 - 3 = 9.$$

Beispiel 2. $5x + 7y = 81.$

$$5 . x = -7 . y + 81.$$
$$(5) \quad (7)$$
$$5 \quad 81$$

I. 5, 10, 15, 20, 25 .... 90, **95** ...
II. 81, 88, **95**.

$$5x = 95$$
$$x = 19.$$

Beispiel 3. Sei gegeben $17x + 19y = 269$.

Dann ist: $17x = -19y + 269$.

Man suche für (17) (19) die Ordn.-Zahl der Compl.
17, 269, oder
17, 3 (weil der 2te Cykel nur 19 Glieder hat).

Durch Anwendung der Formeln §. 173 erhält man:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{19}{17} \text{ mit dem Reste } 2 (= a_1)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{17}{19} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 17 (= b_1), \text{ folglich}$$

$$\frac{\alpha A + a}{a_1} . \beta = \frac{17A + 17}{2} . 19 = 323 \text{ (für } A = 1)$$

$$\frac{\beta B + \beta}{b_1} . \alpha = \frac{19B + 3}{17} . 17 = 136 \text{ (für } B = 7)$$

$$459$$

Hier konnte man auch $A = 0$ setzen, indem die Periode nur 17×19 d. i. 323 Compl. enthält. Die gesuchte Ordnungszahl ist demnach $= 136$. Daraus ergiebt sich $17x = 136$, also $x = 8$.

Nach §. 172 erhält man die Reihen:

I. 17, 34, 51, 68, 85, 102, 119, **136**
II. 3, 22, 41, 60, 79, 89, 117, **136** u. s. w.

Beispiel 4. Gegeben: $13x + 17y = 100$.

Da $13x = -17y + 100$, so hat man für (13) (17) die Compl. 13, 100, oder 13, 15.

Man findet: I. 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, **117** ...
II. 15, 32, 49, 66, 83, 100, **117**.

Folglich ist $13x = 117$ und $x = 9$, mithin $y = -1$. Daher die Werthe: $x = \;\; 9, \;\; 26, \;\; 43 \ldots.$

$y = -1, -14, -27 \ldots.$

Die gegebene Gleichung liefert also für die Unbekannten keine positiven Werthe und ist deshalb unmöglich.

§. 177. **Die Julianische Periode.** Diese besteht aus den einzelnen Jahren des Indictionscykels von 15, des Mondcykels von 19 und des Sonnencykels von 28 Jahren mit allen möglichen Verbindungen, so dass die Reihenzahlen $\alpha = 15$, $\beta = 19$ und $\gamma = 28$ sind. Die ganze Periode umfasst einen Zeitraum von $15 . 19 . 28 = 7980$ Jahren.

Jedes Jahr aus dieser Periode hat seine besonderen chronologischen Kennzeichen und wird durch die Indiction (Zinszahl) $= a$, die goldene Zahl des Mondcykels $= b$, und die Zahl des Sonnenzirkels $= c$ angegeben, so dass ein solches mit der Complexion a, b, c dieser Periode harmonirt. Um daher ein verlangtes Jahr in der Periode zu finden, hat man nur nöthig die Ordnungszahl für die Complexion a, b, c nach §. 169. zu bestimmen.

Für jede hierher gehörige Aufgabe hat man sich der Producte zu bedienen:

$\beta\gamma = 19 . 28 = 532$; $\alpha\gamma = 15 . 28 = 420$ und $\alpha\beta = 15 . 19 = 285$, sowie der Reste, welche sich aus der Division ergeben, von

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha} = \frac{532}{15}, \text{ giebt Rest } 7 = a,$$

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta} = \frac{420}{19} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 2 = b,$$

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma} = \frac{285}{28} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 5 = c, \text{ wonach die Ordn.-Zahl}$$

$$\frac{15A + a}{7} . 532 + \frac{19B + b}{2} . 420 + \frac{28C + c}{5} . 285 \text{ ist, welche}$$

das Jahr angiebt, welchem die Kennzeichen a, b, c zukommen.

Beispiel. 1) Ein Jahr der Julianischen Periode hat die Charaktere 7, 12, 4; das wievielste ist es in der Periode?

Nach diesen Formeln findet man (wie schon §. 170. 2.) die Ordnungszahl 6472, welche also das verlangte Jahr angiebt.

2) Welches Jahr hat zur Zinszahl 10, zur goldenen Zahl 14 und zum Sonnenzirkel 26? (Heiss Samml. p. 258.)

Hier ist für (15) (19) (28) gegeben:

10, 14, 26.

Es ist demnach: $\frac{15A+10}{7}.532 = -2660$ für $A = -3$

$\frac{19B+14}{2}.420 = \quad 2940$ „ $B = \quad 0$

$\frac{28C+26}{5}.285 = \quad 6270$ „ $C = \quad 3$

folglich 6550 das gesuchte Jahr.

Da nun das 4714te Jahr der Julianischen Periode das erste der christlichen Zeitrechnung ist*), so hat man von einem Jahre der Jul. Per. nach 4713 diese Zahl abzuziehen, um das Jahr der christl. Zeitrechnung zu finden. Es ist demnach 6550—4713 = 1837 das verlangte Jahr.

3) Welches Jahr nach und vor Christi Geburt hat zur goldenen Zahl 19, zum Sonnenzirkel 28, zur Römer-Zinszahl 15?

Da die letzte Compl. der Jul. Periode = 15.19.28 = 7980 ist, so hat man davon 4713 abzuziehen; dadurch erhält man das 3267ste Jahr nach Christi Geb. und also auch 4713 vor Chr. Geb.

4) Welches Jahr (der christl. Zeitrechnung) hat zur goldenen Zahl 2, zum Sonnenzirkel 5 und zur Römer-Zinszahl 2?

Man hat $\frac{15A+2}{7}.532 = 5852$ für $A = 5$

$\frac{19B+2}{2}.420 = 8400$ „ $B = 2$

$\frac{28C+5}{5}.285 = 8265$ „ $C = 5$

folglich ist 22517 das gesuchte Jahr in der Jul. Periode, welches durch Division mit der Complexionszahl 7980 den Rest 6557 giebt; dieses ist das Jul. Jahr in der 1sten geschlossenen Periode. Folglich ist 6557 — 4713 = 1844 das gesuchte Jahr der christlichen Zeitrechnung.

§. 178. **Aufgabe.** Die kleinste und alle übrigen Zahlen zu finden, welche durch gegebene ganze Zahlen α, β, γ, δ ... dividirt, gegebene Reste a, b, c, d ... lassen.

Auflösung. Man betrachte die Reste a, b, c, d ... als eine Complexion einer cykl. Periode aus den Reihenzahlen α, β, γ, δ ... und suche die Ordnungszahl derselben (§. 169.). Diese sei $= n$, so sind die verlangten Zahlen nach der Ordnung:

---

*) Kästners angewandte Mathem. 2. Thl. Chronol. §. 48.

$n, \; n+p, \; n+2p, \; n+3p$ etc.

oder $n, \; n+D, \; n+2D, \; n+3D$ etc., wobei D den kleinsten Dividuus und p das Product der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ bedeutet, je nachdem gemeinschaftliche Faktoren unter ihnen vorkommen oder nicht.

Die Richtigkeit dieser Formeln ergiebt sich aus dem Vorigen.

§. 179. **Einige Beispiele.** 1) Welche Zahlen lassen durch 3, 7 und 10 dividirt, nach der Reihe die Reste 2, 3 und 9?

Man suche die Ordnungszahl für die Complexion:

(3) (7) (10)
2 3 9.

Da $\frac{\beta\gamma}{\alpha} = \frac{70}{3}$ den Rest 1

$\frac{\alpha\gamma}{\beta} = \frac{30}{7}$ „ „ 2

$\frac{\alpha\beta}{\gamma} = \frac{21}{10}$ „ „ 1 giebt, so ist

$$\frac{\alpha A+a}{a_1} \cdot \beta\gamma = \frac{3A+2}{1} \cdot 70 = 140 \text{ für } A = 0$$

$$\frac{\beta B+b}{b_1} \cdot \alpha\gamma = \frac{7B+3}{2} \cdot 30 = 150 \text{ „ } B = 1$$

$$\frac{\gamma C+c}{c_1} \cdot \alpha\beta = \frac{10C+9}{1} \cdot 21 = 189 \text{ „ } C = 0.$$

210 | 479 | 2
420

Die kleinste Zahl = 59.

Nach der mech. Regel erhält man die Reihen:

I. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, **59**

II. 7, 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, **59**

III. 9, 19, 29, 39, 49, **59**. Es ist also die gesuchte Zahl = 59

2) Wenn unter den gegebenen Zahlen mehrere vorkommen, welche ein gemeinschaftliches Mass haben.

Welche Zahlen lassen durch 6, 12, 15 dividirt, nach der Reihe die Reste 1, 1, 10?

Für diese Zahlen nehme man bloss

(4) (5) als Reihenzahlen, so wird
1, 10 oder 1, 5 die gegebene Compl.

Man hat sodann: $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{4}{5}$ mit dem Reste $1 = a_1$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{4}$ „ „ „ $4 = b_1$, folglich

$$\frac{\alpha A + a}{a_1} \cdot \beta = \frac{4A+1}{1} \cdot 5 = 5 \text{ (für } A = 0)$$

$$\frac{\beta B + b}{b_1} \cdot \alpha = \frac{5B+5}{4} \cdot 4 = \underline{20} \text{ (für } B = 3)$$

Daher ist 25 die kleinste Zahl.

Weil der kleinste Dividuus der gegebenen Zahlen $= 60$, so sind alle übrigen Zahlen in der Formel $60n+25$ enthalten (§. 178).

3) Welche Zahlen lassen, durch 5, 6, 7, 8 dividirt, nach der Reihe die Reste 3, 1, 0, 5?

Der kleinste Dividuus ist $= 5 . 3 . 7 . 8 = 840$. Man hat daher für $\alpha=5$, $\beta=3$, $\gamma=7$, $\delta=8$ die Complexion 3, 1, 0, 5 oder

(5) (3) (7) (8)
3 1 0 5.

Es ist nun: $\frac{\beta\gamma\delta}{\alpha} = \frac{3.7.8}{5}$ mit dem Reste $3 = a_1$

$\frac{\alpha\gamma\delta}{\beta} = \frac{5.7.8}{3}$ „ „ „ $1 = b_1$

$\frac{\alpha\beta\delta}{\gamma} = \frac{5.3.8}{7}$ „ „ „ $1 = c_1$

$\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta} = \frac{5.3.7}{8}$ „ „ „ $1 = d_1$.

Ferner ist: $\frac{\alpha A + a}{a_1} \cdot \beta\gamma\delta = \frac{5A+3}{3} \cdot 168 = 168$ (für $A = 0$)

$$\frac{\beta B + b}{b_1} \cdot \alpha\gamma\delta = \frac{3B+1}{1} \cdot 280 = 280 \text{ (für } B = 0)$$

$$\frac{\gamma C + c}{c_1} \cdot \alpha\beta\delta = \frac{7C+0}{1} \cdot 120 = 0 \text{ (für } C = 0)$$

$$\frac{\delta D + d}{d_1} \cdot \alpha\beta\gamma = \frac{8D+5}{1} \cdot 105 = \underline{525}$$

daher die Ordnungszahl $= 973$, welche die Probe hält. Diese durch den kleinsten Dividuus 840 getheilt, giebt zum Reste 133 als die kleinste gesuchte Zahl; die übrigen sind $840n+133$.

Anmerkung. Alle ähnlichen Aufgaben, bei welchen sowohl positive als negative Reste gegeben sind, lassen sich nach dieser Methode sehr einfach auflösen. Unter den nachfolgenden Aufgaben kommen einige der Art vor.

Anhang.

I. Einfache und leichte Methode unbestimmte Gleichungen des ersten Grades mit zwei unbekannten Zahlen aufzulösen. Von Prof. Dr. Kunze.

§. 180. Wir dürfen in einem Lehrbuche der unbestimmten Analytik eine Methode zur Auflösung von Gleichungen des ersten Grades nicht übergehen, welche sich allerdings durch Originalität empfiehlt und von dem Erfinder in einem Programm (1851), ausserdem noch besonders abgedruckt, zu Eisenach 1851 erschien.

Der Verf. erklärt seine Methode an einer Reihe von Beispielen, von denen hier einige zur Erläuterung folgen.

1) Es sei die Gleichung gegeben:

$$28x - 45y = 53. \quad (1)$$

Man setze $x - 2y = a$ (2), so erhält man $x = a + 2y$. Diesen Werth in (1) gesetzt, giebt:

$$28a + 56y - 45y = 53, \text{ oder}$$
$$28a + 11y = 53 \quad (3).$$

Setzt man ferner (4) $3a + y = b$, oder $y = b - 3a$, so folgt aus (3): $28a + 11b - 33 = 53$, oder

$$11b - 5a = 53 \quad (5).$$

Wiederum setze man (6) $2b - a = c$, oder $a = 2b - c$, dann kommt $11b - 10b + 5c = 53$, oder

$$5c + b = 53 \quad (7).$$

Aus (7) folgt: $b = 53 - 5c$ (8).

Aus (6 und 7) folgt: $a = 2b - c = 106 - 11c$ (9).

Aus (4 und 8) folgt: $y = b - 3a = 28c - 265$ (10).

Endlich folgt aus (2 und 6): $x = a + 2y = 45c - 424$ (11).

Damit nun die Werthe von x und y in (10 und 11) positiv werden, nehme man $c = 10 + n$; dann wird:

$$y = 15 + 28n \text{ und}$$
$$x = 26 + 45n,$$ welches die allgemeinen Werthe sind.

Um nun einzusehen, woher diese Substitutionen kommen, erwäge man, dass die Division der Coefficienten 45 und 28 von y und x jedesmal durch eine ganze Zahl im Quotienten ausgedrückt werden kann. Es ist nämlich:

$$28x - 45y = 28x - 56y + 11y = 53.$$

Dividirt man diese Gleichung durch 28, so erhält man:

$$x = 2y + \frac{11y}{28} = \tfrac{53}{28}, \text{ folglich, wenn man } a$$

für $x - 2y$ setzt:

$$a + \frac{11y}{28} = \tfrac{53}{28}, \text{ mithin}$$

$$28a + 11y = 53.$$

Somit wäre die erste Verwandlung der gegebenen Gleichung bewerkstelligt.

Dividirt man in dieser Gleichung wieder mit dem kleineren Coefficienten 11, so kann man setzen:

$$3a - \frac{5a}{11} + y = \tfrac{53}{11} \text{ und wenn man}$$

$$3a + y = b \text{ setzt, so erhält man:}$$

$$b - \frac{5a}{11} = \tfrac{53}{11} \text{ oder}$$

$$11b - 5a = 53.$$

Dividirt man nun mit 5, so entsteht

$$2b + \frac{b}{5} - a = \tfrac{53}{5}, \text{ setzt man}$$

$$2b - a = c, \text{ so kommt:}$$

$$c + \frac{b}{5} = \tfrac{53}{5}, \text{ oder}$$

$$5c + b = 53.$$

Das Uebrige ist nun für sich klar und beruht auf einfachen Substitutionen.

Bei dem 2ten Exempel $23x - 16y = 13$ stellt der Verf. die successiven Uebergänge in der Auflösung folgendergestalt zusammen:

$x - y = a$	$16a + 7x = 13$	$b = \ldots\ldots\ 13 - 2c$
$2a + x = b$	$7b + 2a = 13$	$a = c - 3b = 7c - 39$
$3b + a = c$	$2c + b = 13$	$x = b - 2a = 91 - 16c$
		$y = x - a = 130 - 32c$

Für $c = 5 - n$ wird:

$$x = 91 - 80 + 16n = 11 + 16n$$

$$y = 130 - 115 + 23n = 15 + 23n.$$

Zur Erläuterung diene nur, dass zuerst aus der Division mit 16 hervorgeht:

$$x + \frac{7x}{16} - y = \tfrac{13}{16}.$$

Setzt man $x - y = a$, so folgt:

$$a + \frac{7x}{16} = \frac{13}{16}, \text{ oder}$$

$16a + 7x = 13$. Dividirt man jetzt mit 7, so erhält man: $2a + \frac{2a}{7} + x = \frac{13}{7}$, also wenn

$2a + x = b$ gesetzt wird:

$$b + \frac{2a}{7} = \frac{13}{7}, \text{ mithin}$$

$7b + 2a = 13$. Dividirt man ferner mit 2, so ergiebt sich: $3b + \frac{b}{2} + a = \frac{13}{2}$ und, wenn

$3b + a = c$ gesetzt wird, findet sich endlich $2c + b = 13$, womit die 6 Gleichungen in den beiden ersten Spalten bestimmt sind. Der weitere Verlauf der Rechnung ist nun nach dem Vorigen leicht zu übersehen.

Betrachten wir auch die Form $ax + by = c$. In Nr. 13. stellt der Verf. die Gleichung auf:

$$24x + 7y = 1000.$$

Durch Division mit 7 erhält man sogleich:

$$3x + \frac{3x}{7} + y = \frac{1000}{7}.$$

Setzt man $3x + y = a$, so folgt:

$$a + \frac{3x}{7} = \frac{1000}{7}, \text{ daher}$$

$7a + 3x = 1000$. Dividirt man wieder mit 3, so kommt: $2a + \frac{a}{3} + x = \frac{1000}{3}$.

Man setze: $2a + x = b$; dann ist

$$b + \frac{a}{3} = \frac{1000}{3}, \text{ folglich}$$

$3b + a = 1000$. Hieraus zieht man nun

$$a = 1000 - 3b,$$

$$x = b - 2a = 7b - 2000$$

$y = a - 3x = 7000 - 24b$. Da x, y positive ganze Zahlen sein sollen, so folgen die 6 Auflösungen:

$$\begin{cases} x = 2, \ \ 9, \ 16, \ 23, \ 30, \ 37. \\ y = 136, \ 112, \ 88, \ 64, \ 40, \ 16. \end{cases}$$

Für die Gleichung Nr. 17. giebt der Verf. folgende Auflösung:

$$[21x + 13y = 233]$$

$$\begin{array}{ll} 2x + y = a & 13a - 5x = 233 \\ 3a - x = b & 5b - 2a = 233 \\ 2b - a = c & 2c + \ b = 233 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b = \ldots\ldots\ 233 - 2c \\ a = 2b - c = 466 - 5c \\ x = 3a - b = 1165 - 13c \\ y = a - 2x = 21c - 1864, \end{array}$$

wo x und y nur für $c = 89$ eine Aufl. gestattet, nämlich $x = 8$ und $y = 5$.

Dass man bei diesen Divisionen der Coefficienten zuweilen den Quotienten um 1 grösser nimmt, um dadurch die Rechnung zu vereinfachen, lässt sich leicht einsehen.

Sehr interessant sind auch die Folgerungen, welche der Verf. aus einigen Gleichungen zieht, deren Coefficienten besondere Eigenschaften haben. So folgt aus $17x - 71y = 54$, weil $71 - 17 = 54$, dass der kleinste Werth von x um 1 kleiner als der Coeff. von y, und der kleinste Werth von y um 1 kleiner als der Coeff. von x ist, so dass überhaupt, wenn

$$\alpha x - \beta y = \beta - \alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \beta - 1 \\ y = \alpha - 1 \end{array}\right\} \text{die kleinsten Werthe sind.}$$

Ist ferner: $\alpha x - \beta y = \alpha + \beta$, so sind wiederum:

$$\left.\begin{array}{l} x = \beta + 1 \\ y = \alpha - 1 \end{array}\right\} \text{die kleinsten Werthe.}$$

Ist endlich $\alpha x - \beta y = k(\alpha + \beta)$, so sind

$$\left.\begin{array}{l} x = \beta + k \\ y = \alpha - k \end{array}\right\} \text{die kleinsten Werthe;}$$

z. B. für $19x - 11y = 60$, ist $19 + 11 = 30$
also $60 = 2(19 + 11)$, folgl. $x = 11 + 2 = 13$
und $y = 19 - 2 = 17$.

Vergl. §. 49 seq.

Diese Methode Gleichungen des ersten Grades aufzulösen ist, wie man sieht, neu und sinnreich; allein sie erfordert viel Aufmerksamkeit und einen ziemlich gewandten Rechner; sie theilt ausserdem mit der directen algebraischen Auflösung den Vorzug, dass sie jedesmal auf die allgemeinen Werthe für die Unbekannten führt.

II. Geometrische Construction der unbestimmten Gleichungen.

§. 181. Es ist immer belehrend, arithmetische Beziehungen durch eine geometrische Construction, d. h. graphisch zu veranschaulichen. So wie man nun für bestimmte algebraische Gleichungen deren Wurzeln, sie mögen positiv oder negativ sein, in einem geometrischen Bilde versinnlicht, ebenso lassen sich auch unbestimmte Gleichungen vermittelst eines Coordinatensystems als geometrische Oerter verzeichnen. Es ist hier jedoch nur von den Gleichungen des ersten Grades mit zwei Unbekannten die Rede, welche unter der allgemeinen Form $ax \mp by = c$ begriffen sind.

§. 182. **Aufgabe.** Man soll die Gleichung $ax - by = 0$ oder $y = \frac{a}{b}x$ construiren.

Auflösung.

D
Y M
M
M
C
M
A
P B P P P X

Es seien AX, AY die beiden Coordinatenaxen; man nehme $AB = b$, BC ⫲ AY, $= a$ und ziehe die unbestimmte Gerade ACD; dann ist für jede Abscisse $AP = x$ die zugehörige Ordinate $PM = y$.

Denn man hat $AB : BC = AP : AM$

d. i. $b : a = x : y$

folglich $y = \frac{a}{b}x$.

Der geometrische Ort der Gleichung ist daher die Gerade AD.

§. 183. **Aufgabe.** Man soll die Gleichung construiren

$$ax - by = \mp c.$$

Auflösung. Man kann hier die beiden Fälle unterscheiden, wo c entweder positiv, oder negativ ist.

Es sei nun 1) $ax - by = -c$.

Man setze $c = bq$.

Dann hat man $ax - by = -bq$, folglich

$$y = \frac{a}{b}x + q.$$

Auf der Abscissenaxe AX nehme man $AD = b$, errichte in D ein Perpendikel DF, mache $DE = q$ und $EF = a$. Durch E ziehe man $BR \parallel AX$, welche die rechtwinklige Ordinatenaxe AY in B schneide. Zieht man nun durch B und F die Gerade BC, so hat man: $BE : EF = BP : PM$ d. i.

$$b : a = x : \frac{ax}{b}.$$

Daher, wenn $QM = y$, so ist

$$QM = PM + PQ \text{ oder}$$

$$y = \frac{ax}{b} + q.$$

Der Ort der Gleichung ist demnach die Gerade BC.

Es sei 2) $ax - by = bq$

so ist $$y = \frac{ax}{b} - q.$$

Sind AX, AY die Coordinatenaxen, so ziehe man in einem Abstande von $AG = q$ durch G die $GK \parallel AX$, mache $GD = b$, $DF = a$ und ziehe durch G und F eine Gerade GC.

Nun sei $GQ = x$, dann ist:

$$GD : DF = GQ : QM$$

d. i. $$b : a = x : QM$$

folglich $$QM = \frac{ax}{b}.$$

Da nun $PM = QM - PQ$, so wird

$$PM = \frac{ax}{b} - q,$$

oder $$y = \frac{ax}{b} - q.$$

Der Ort der Gleichung ist demnach die Gerade GC.

§. 184. **Zusatz.** Aus der Construction der Gleichung $ax - by = c$ ergiebt sich Folgendes:

1) Für $GH = \frac{by}{a}$ ist $y = 0$.
2) Für negative Abscissen (x) wird auch y negativ.
3) Je grösser x wird, desto grösser wird y und wachsen die Werthe von y mit denen von x in's Unendliche fort.
4) Für $x = 0$ ist $y = \mp q$. (§. 47.)
5) Endlich ersieht man aus der Figur, dass die Werthe von x und y in arithmetischen Progressionen fortschreiten. Denn es nehme x um b zu, so muss y um ein gewisses Δy grösser werden und es ist

   (1) für $y = \frac{ax}{b} - q$ sowohl als $y = \frac{ax}{b} + q$

   (2) $b(y) = ax - bq$ $\qquad by = ax + bq$, daher

   (3) $b(y + \Delta y) = a(x + b) - bq$ und $b(y + \Delta y) = a(x + b) + bq$

   oder $by + b\Delta y = ax + ab - bq$ und $by + b\Delta y = ax + ab + bq$

   wenn davon (2) subtrahirt wird, in beiden Fällen $b\Delta y = ab$, mithin $\Delta y = a$, wie dieses auch im I. Cap. §. 22. bewiesen worden.

§. 185. **Aufgabe.** Es soll die Gleichung

$$ax + by = c$$

construirt werden.

Auflösung. Man ziehe unter einem beliebigen spitzen Winkel die Coordinatenaxen AX und AY und nehme auf jener $AB = q$, $AD = b$; darauf ziehe man durch D die $FE \mathbin{\#} AX$ und mache $DF = a$; ferner ziehe man durch A und F die AG unbestimmt, sowie durch B die $BH \mathbin{\#} AG$, welche die FE in E

treffe. Setzt man nun beliebig die Abscisse $AP = x$, so wird deren zugehörige Ordinate $PM = y$ und BH der Ort der gegebenen Gleichung sein.

Denn, wenn c wie vorhin $= bq$ gesetzt wird, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in
$ax + by = bq$, oder $by = -ax + bq$, woraus folgt:

$$y = -\frac{a}{b}x + q.$$

Es ist aber nach der Construction:

$$AD : DF = AP : PQ, \text{ d. i.}$$

$$b : a = x : \frac{a}{b}x$$

folglich $PM = MQ - PQ = y = AB - \frac{a}{b}x$

oder $y = -\frac{a}{b}x + q$, also, weil $q = \frac{c}{b}$,

$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, welches die gegebene Gleichung ist.

Der Ort der Gleichung ist demnach die Gerade BH.

X Y
P′
B E M J M′ H
y
q P
D
A F Q J′ Q′ G

§. 186. **Zusatz.** 1) Wächst die Abscisse AP' über AJ hinaus, so wird $P'Q' > q$ und daher die Ordinate $P'M'$ negativ. Trifft die Abscisse in J, d. h. wenn $x = AJ$, so wird $PQ = JJ' = q$, also die Ordinate $y = q - \frac{ax}{b} = 0$.

2) Für $x = 0$ wird $y = q$, und je grösser x wird, desto kleiner wird y; auch bleibt für negative Abscissen der Werth von y positiv wachsend.

3) Aus der Figur ergiebt sich ferner, wenn man die Abscissen um AD vergrössert, dass dadurch die zugehörigen Ordinaten PM zugleich um DF, d. i. a, abnehmen, dasselbe Gesetz, wie §. 22 bewiesen ist.

Die möglichen positiven Werthe der Grössen x und y sind also auf die Grenzen AJ und AB eingeschränkt.

Diophantische Aufgaben vom ersten Grade, nebst Auflösungen, als Material zur Uebung.

Nr. 1. Man soll aus der Gleichung $7x - 9y = 0$ sowohl die allgemeinen als auch die besonderen Werthe für x und y angeben.

Auflösung. Aus der Gleichung folgt $x = y + \frac{2y}{7}$. Sei $y = 7A$, so ist $x = y + 2A = 9A$.

Wenn daher $A = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4 \ldots$
so ist $x = 9, \quad 18, \quad 27, \quad 36 \ldots$
und $y = 7, \quad 14, \quad 21, \quad 28 \ldots$

Nr. 2. Man soll aus der Gleichung

$$3x - 5y = 1$$

sowohl die allgemeinen, als auch die besonderen Werthe angeben.

Auflösung. Es ist $x = 5B + 2$; $y = 3B + 1$.

Für $B =$	0,	1,	2,	3 . . .
ist $x =$	2,	7,	12,	17 . . .
$y =$	1,	4,	7,	10 . . .

Nr. 3. Gleichung: $5x - 3y = 11$.

Auflösung. Es ist $x = 3A + 1$; $y = 5A - 2$.

Ist nun $A =$	0,	1,	2,	3,	4 . . .
so ist $x =$	1,	4,	7,	10,	13 . . .
$y =$	−2,	3,	8,	13,	18 . . .

Nr. 4. Gleichung: $3x - 5y = 11$.

Auflösung. $x = 5A + 2$; $y = 3A - 1$.

$A =$	0,	1,	2,	3,	4 . . .
$x =$	2,	7,	12,	17,	22 . . .
$y =$	−1,	2,	5,	8,	11 . . .

Nr. 5. Gleichung: $31x - 5y = 249$.

Auflösung. $x = 5B + 9$; $y = 31B + 6$.

$B =$	0,	1,	2,	3,	4 . . .
$x =$	9,	14,	19,	24,	29 . . .
$y =$	6,	37,	68,	99,	130 . . .

Nr. 6. Gleichung: $17x - 19y = 3$.

Auflösung. $x = 19B + 27$; $y = 17B + 24$.

$B =$	$-1,$	$0,$	$1,$	$2 \ldots.$
$x =$	$8,$	$27,$	$46,$	$65 \ldots.$
$y =$	$7,$	$24,$	$41,$	$58 \ldots.$

Nr. 7. Gleichung: $25x - 6y = 16$.

Auflösung. $x = 6B + 4$; $y = 25B + 14$.

Ist $B =$	$0,$	$1,$	$2,$	$3 \ldots$
so ist $x =$	$4,$	$10,$	$16,$	$22 \ldots$
$y =$	$14,$	$39,$	$64,$	$89 \ldots$

Nr. 8. Gleichung: $21x - 8y = 1$.

Auflösung. $x = 8D - 3$; $y = 21D - 8$.

$D =$	$1,$	$2,$	$3 \ldots$
$x =$	$5,$	$13,$	$21 \ldots$
$y =$	$13,$	$34,$	$55 \ldots$

Nr. 9. Gleichung: $3x + 5y = 82$.

Auflösung. $x = 29 - 5B$; $y = 3B - 1$.

$B =$	$1,$	$2,$	$3,$	$4,$	5
$x =$	$24,$	$19,$	$14,$	$9,$	4
$y =$	$2,$	$5,$	$8,$	$11,$	$14.$

Nr. 10. Gleichung: $13x + 17y = 100$.

Auflösung. $x = 9 - 17B$; $y = 13B - 1$.

Wenn also $B =$	$0,$	$1,$	$2 \ldots.$
so ist $x =$	$9,$	$-8,$	$-25 \ldots.$
$y =$	$-1,$	$12,$	$25 \ldots.$

In diesem Beispiele ist also eine Auflösung in ganzen positiven Zahlen unmöglich.

Nr. 11. Gleichung: $17x + 19y = 269$.

Auflösung. $x = 8 - 19A$; $y = 17A + 7$.

$A =$	$0,$	$1 \ldots$
$x =$	$8,$	-11
$y =$	$7,$	24

Nr. 12. Gleichung: $7x + 11y = 100$.

Auflösung. $x = 19 - 11B$; $y = 7B - 3$.

$B =$	$0,$	$1,$	2
$x =$	$19,$	$8,$	-3
$y =$	$-3,$	$4,$	$11.$

Nr. 13. Gleichung: $21x + 31y = 1770$.

Auflösung. $x = 21B - 12$; $y = 102 - 31B$.

$B =$	1,	2,	3
$x =$	9,	30,	51
$y =$	71,	40,	9.

Nr. 14. In zwei Säcken befinden sich zusammen 100 Stück Thaler. Die Thaler im ersten Sacke lassen sich genau zu 5, im zweiten zu 6 überzählen. Man soll aus diesen Angaben bestimmen, wie viel Stück in jedem Sacke sind.

Auflösung. Im ersten Sacke seien $5x$, im zweiten $6y$ Thaler; dann ist $5x + 6y = 100$.

Für $y = 0$ ist $x = 20$. Daher ist

$x =$	20,	14,	8,	2
$y =$	0,	5,	10,	15.

Folglich

$5x =$	100,	70,	40,	10.
$6y =$	0,	30,	60,	90.

Nr. 15. Wenn bei voriger Aufgabe im ersten Sacke sich die Thaler genau zu 8 überzählen lassen, im zweiten aber, wenn man sie zu 5 überzählt, 4 übrig bleiben; wie viel ℛ sind dann in jedem Sacke?

Auflösung. Der erste enthalte $8x$, der zweite $5y + 4$, so ist

$$8x + 5y + 4 = 100, \text{ oder}$$
$$8x + 5y = 96.$$

Für $y = 0$ ist $x = 12$. Daher ist

$x =$	12,	7,	2
und $y =$	0,	8,	16.

Folglich

$8x =$	96,	56,	16
$5y+4 =$	4,	44,	84.

Nr. 16. Was für ein Vielfaches von 7 hat man zu 11 zu setzen, damit die Summe durch 3 theilbar sei?

Auflösung. Das $x$fache, so ist $11 + 7x = 3y$, oder
$$3y - 7x = 11.$$

Man findet nun $x = 3A - 2$ und $y = 7A - 1$ und erhält

für $A =$	0,	1,	2,	3 ...
$x =$	-2,	1,	4,	7 ...
$y =$	-1,	6,	13,	20 ...

Nr. 17. Die Peripherie eines Kreises kann man sowohl in 6 als auch in 5 gleiche Theile theilen. Wie bestimmt man vermittelst dieser Theile $\frac{1}{15}$ der Peripherie?

Auflösung. Man nehme die Peripherie als Einheit an und es seien von $\frac{x}{5}$ abzuziehen $\frac{y}{6}$, um $\frac{1}{15}$ zu erhalten.

Dann ist $\frac{x}{5} - \frac{y}{6} = \frac{1}{15}$, oder

$$6x - 5y = 2.$$

Es ist also $y = x + \frac{x-2}{5}$.

Setzt man $x - 2 = 5A$, so wird

$x = 5A + 2$, folglich

$y = 6A + 2$.

Wenn also $A = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3 \ldots.$

so ist $x = 2, \quad 7, \quad 12, \quad 17 \ldots.$

und $y = 2, \quad 8, \quad 14, \quad 20 \ldots.$

Demnach ist $\frac{2}{5} - \frac{2}{6} = \frac{1}{15}$,

$\frac{7}{5} - \frac{8}{6} = \frac{1}{15}$ u. s. w.

Nr. 18. Aus der Gleichung $8x + 11y = 65$ die Werthe von x und y zu finden.

Auflösung. Man findet $x = 4 + 11C$ und $y = 3 - 8C$, folglich $x = 4$ und $y = 3$.

Nr. 19. Man soll die kleinsten Werthe von x und y finden, welche den Bedingungen der Gleichung

$$19x - 117y = 11$$

Genüge leisten.

Auflösung. Diese sind 56 und 9.

Nr. 20. Es ist die Gleichung gegeben

$$21y + 9x = 6000.$$

Man soll angeben, wie viele Auflösungen in ganzen positiven Zahlen möglich sind!

Auflösung. Im Ganzen sind 95 verschiedene Auflösungen möglich. S. §. 44.

Nr. 21. In wie vielen Acht- und Zwölfβstücken lassen sich 148 β bezahlen?

Auflösung. Ex ist $8x + 12y = 148$, oder

$$2x + 3y = 37.$$

Die weitere Entwickelung giebt

$$x = 17 - 3A \text{ und } y = 1 + 2A.$$

Man erhält also folgende 6 Auflösungen:

für $A =$	0,	1,	2,	3,	4,	5
$x =$	17,	14,	11,	8,	5,	2
$y =$	1,	3,	5,	7,	9,	11.

Nr. 22. Man sucht zwei ganze und positive Zahlen, deren Summe und Differenz addirt, 12 giebt.

Auflösung. Die eine Zahl sei $= x$, die andere $= y$. Dann ist

$$x + y + x - y = 12$$
$$2x = 12 \text{ und}$$
$$x = 6.$$

Hier tritt nun der Fall ein, dass die willkührliche Annahme für den Werth einer der Zahlen verboten ist, während sie für die andere unbeschränkt stattfindet. Setzt man also

$x =$	6	6	6	6	6	
$y =$	1	2	3	4	5,	so ist
$x + y =$	7	8	9	10	11	
$x - y =$	5	4	3	2	1	
beide addirt:	12	12	12	12	12	

Nr. 23. Man soll 101 in zwei Theile theilen, dass sich der eine durch 7, der andere durch 11 theilen lasse.

Auflösung. Ist der eine Theil $= 7x$, so ist der andere $= 11y$. Es ist also $7x + 11y = 101$.

Man erhält nun folgende allgemeine Werthe:

$$y = 7C - 1$$
$$x = 16 - 11C.$$

Hiernach ist $7x = 35$ und $11y = 66$.

Andere Werthe finden nicht statt.

Nr. 24. Zwei Zahlen x und y zu finden, so dass sich die Summe derselben zu ihrer Differenz verhalte $= 8 : 5$.

Auflösung. Es ist

$$x + y : x - y = 8 : 5, \text{ folglich}$$
$$5x + 5y = 8x - 8y, \text{ oder}$$
$$13y = 3x.$$

Daher ist $x = 13A$ und $y = 3A$.

Wenn daher $A =$	1,	2,	3 . . .
so ist $y =$	3,	6,	9 . . .
und $x =$	13,	26,	39 . . .

Nr. 25. Ein Rad hat 7 Zähne, ein zweites in dasselbe eingreifendes 11 Zähne. Nach wie vielen Umläufen der Räder wird

derselbe Zahn des ersten Rades wieder in dieselbe Zahnlücke des zweiten Rades greifen?

Auflösung. Da jeder der 7 Zähne des 1sten Rades bei einem Umlaufe 7 Zähne des andern wegschiebt, so ist einleuchtend, dass mit einem Umlaufe des ersten das andere Rad nur $\frac{7}{11}$ seines Umlaufes gemacht hat. Wenn also das erste x Umläufe macht, so hat das zweite $\frac{7}{11}x$ Umläufe gemacht. Es möge nun das 2te Rad y Umläufe machen, um der Bedingung zu genügen, so ist: $\frac{7}{11}x = y$ oder

$$7x = 11y.$$

Folglich $x = \frac{11y}{7}$, daher für $y = 7A$ ist $x = 11A$.

Nimmt man also	$A =$	1,	2,	3 . . . .
so ist	$x =$	11,	22,	33 . . . .
und	$y =$	7,	14,	21 . . . .

Es findet demnach diese Bestimmung statt: nach 11 Umläufen des ersten, oder 7 Umläufen des zweiten u. s. w.

Nr. 26. Eine mit Strauchholz bewachsene Fläche von 156 Morgen soll in zwei Theile getheilt werden, wovon der eine bei 10jährigem, der andere bei 16jährigem Umtriebe mit Niederwald benutzt werden soll. Wie gross wird jeder dieser Theile sein können?

Auflösung. Es sei der eine Theil $= 10x$, der andere $16y$ Morgen, so ist $10x + 16y = 156$, oder

$$5x + 8y = 78.$$

Hieraus folgt: $y = 5C + 1$ und

$$x = 14 - 8C.$$

Wenn also	$C =$	0,	1
so ist	$y =$	1,	6
und	$x =$	14,	6

Demnach kann der eine Theil sein $16y = 16$, der andere $10x = 140$, oder der eine Theil ist $16 \,.\, 6 = 96$ und der andere $= 6 \,.\, 10 = 60$ Morgen.

Nr. 27. Jemand hat 2 Gefässe und in jedem eine gewisse Quantität Flüssigkeit. Um in beiden gleich viel zu bekommen, giesst er aus dem ersten in das zweite so viel, als schon darin ist; darauf aus dem zweiten wieder in das erste so viel, als nun noch darin ist. Hiernach findet er, dass in beiden Gefässen gleich viel Mass enthalten sind. Wie viel Mass waren anfänglich in jedem?

Auflösung. Im ersten seien x, im zweiten y Mass gewesen; dann ist nach dem ersten Ausgiessen in dem ersten Gefässe noch vorhanden $x-y$, und im zweiten befinden sich $2y$ Mass. Nach dem Ausgusse aus dem zweiten in das erste sind im zweiten noch befindlich $2y-(x-y)$ und im ersten sind nun $2x-2y$. Es ist also

$$2x-2y = 3y-x, \text{ oder}$$
$$3x = 5y.$$

Folglich ist $y = 3A$ und $x = 5A$.

Ist daher $A =$	1,	2,	3,	4 ....
so ist $x =$	5,	10,	15,	20 ....
und $y =$	3,	6,	9,	12 ....

Nr. 28. Wenn aber in der vorigen Aufgabe in den beiden Gefässen erst nach dem zweiten Ausgiessen aus dem ersten in das zweite in beiden gleich viel sein soll; wie viel Mass mussten dann anfänglich in jedem vorhanden sein?

Auflösung.

Zustand des I. Gefässes	Zustand des II. Gefässes
x	y
$x-y$	$2y$
$2x-2y$	$3y-x$
$3x-5y$	$6y-2x$.

Hiernach ist nun

$$3x-5y = 6y-2x, \text{ oder}$$
$$5x = 11y.$$

Mithin $y = 5A$ und $x = 11A$.

Nimmt man $A =$	1,	2,	3 ...
so ist $x =$	11,	22,	33 ...
und $y =$	5,	10,	15 ....

Nr. 29. Alle diejenigen Werthe von x und y zu finden, welche der Gleichung

$$13x + 14y = 200$$

in ganzen Zahlen Genüge leisten.

Auflösung. Es ist $x = 15-y-\frac{y-5}{13}$, mithin

$$y = 13A + 5 \text{ und } x = 10-14A.$$

Demnach sind für $A = 0$, $x = 10$ und $y = 5$ die einzigen verlangten Werthe.

Nr. 30. Man soll die ganzzahligen Werthe von x und y aus der Gleichung $27x+39y=7432$ finden, oder nachweisen, dass es solche nicht gebe!

Auflösung. Diese ist unmöglich, zufolge des §. 20. bewiesenen Lehrsatzes, indem die Coefficienten von x und y einen gemeinschaftlichen Faktor $=3$ haben.

Nr. 31. Zwei Brüche zu finden, deren Nenner 5 und 7 und deren Summe $=\frac{26}{35}$ sei.

Auflösung. Aus $\frac{x}{5}+\frac{y}{7}=\frac{26}{35}$ folgt:

$$7x+5y=26 \text{ und}$$

$$y=7C+1, \text{ sowie } x=3-5C.$$

Hiernach findet man für $C=0$, $\frac{3}{5}$ und $\frac{1}{7}$.

Es giebt Aufgaben, welche dem zweiten Grade anzugehören scheinen, die sich aber auf den ersten Grad zurückbringen lassen. Dahin gehören folgende:

Nr. 32. Zwei ganze positive Zahlen zu finden, dass wenn die eine zum Quadrate der andern addirt wird, ein Quadrat entstehe, dessen Wurzel die Differenz beider Zahlen sei.

Auflösung. Sind x und y diese Zahlen, so ist:

$$x^2+y=(x-y)^2, \text{ oder}$$

$$x^2+y=x^2-2xy+y^2, \text{ folglich}$$

$$y=-2xy+y^2.$$

$$\text{Daher } 1=-2x+y \text{ und}$$

$$y=2x+1.$$

Wenn also $x=1, 2, 3, 4 \ldots.$

so ist $y=3, 5, 7, 9 \ldots.$

Hiernach ist z. B.: $1^2+3=(1-3)^2$ oder $1+3=4$,

$2^2+5=(2-5)^2$ oder $4+5=9$ u. s. w.

Nimmt man $x=n$, so ist $y=2n+1$. Dies sind die allgemeinen Formen für die gesuchten Zahlen, denn es ist:

$$n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

Nr. 33. Gesucht werden zwei Quadrate von der Beschaffenheit, dass wenn man zum Inhalte des ersten den Umfang des zweiten addirt, eben soviel komme, als wenn man zum Inhalte des zweiten den Umfang des ersten addirt.

Auflösung. Sind x und y die Seiten der Quadrate, so ist:

$$x^2+4y=y^2+4x, \text{ folglich}$$

$$x^2-y^2=4(x-y), \text{ oder}$$

$$(x+y)(x-y) = 4(x-y).$$

Folglich ist: $x+y = 4$. Setzt man also:

$$x = 1,\ 2,\ 3$$

so ist: $y = 3,\ 2,\ 1.$

Nr. 34. Wenn dagegen in voriger Aufgabe der Inhalt des ersten weniger dem Umfange des zweiten ebenso gross als der Inhalt des zweiten, weniger dem Umfange des ersten; wie gross können nun die Seiten sein?

Auflösung. Aus $x^2-4y=y^2-4x$ folgt:

$$x = y+4.$$

Nr. 35. Es soll eine gewisse Summe von Gulden und Kreuzern, z. B. 4 Fl. 15 Kr., in lauter Siebenern und Siebenzehnern ausgezahlt werden. Wieviele Stücke müssen von jeder Gattung gegeben werden?

Auflösung. Man möge x Siebener und y Siebenzehner nehmen, so entsteht die Gleichung:

$$7x+17y=255.$$

Hieraus folgt nun: $y=7B+1$

$$x=34-17B.$$

Wenn also $B = 0,\ 1,\ 2,$

so ist $y = 1,\ 8,\ 15$

und $x = 34,\ 17,\ 0.$

Es kann die Zahlung daher nur auf zwei verschiedene Arten geschehen.

Nr. 36. Man soll nachweisen, ob die Gleichung

$$7x+13y=71$$

möglich oder unmöglich sei.

Auflösung. Da die aus der Gleichung gefundenen Werthe $x=12-12B$ und $y=7B-1$, für $B=0$ keine positiven ganzen Zahlen geben, so ist deren Auflösung unmöglich.

Nr. 37. Man verlangt solche Werthe von x und y aus der Gleichung $7x+19y = 1921$ zu finden, dass ihre Summe den möglich kleinsten Werth habe!

Auflösung. Aus der Gleichung ergiebt sich:

$$y = 7C+2 \text{ und}$$

$$x = 269-19C.$$

Für $C = 14$ erhält man $x = 3$ und $y = 100$ als die kleinsten Werthe.

Nr. 38. Zahlen zu finden, welche mit 5 dividirt —1, mit 6 dividirt auch —1 zum Reste lassen.

Auflösung. Offenbar hat eine solche Zahl N die Form $5x-1$, sowie $6y-1$. Es ist also

$$5x-1=6y-1 \text{ oder}$$
$$5x=6y. \text{ Folglich ist}$$
$$x=6A \text{ und } y=5A;$$
$$\text{daher } N=30A-1.$$
$$\text{Für } A=0 \text{ ist } N=-1$$
$$\text{„ } A=1 \text{ „ } N=29 \text{ u. s. w.}$$

Anmerkung. Nach Stifels Lehrsatz erhält man dieselben Resultate. Nach der Probe:

$$5]\frac{29}{30}[6 \quad \text{und} \quad 6]\frac{29}{30}[5$$
$$\text{Rest } \overline{-1} \qquad \text{Rest } \overline{-1}$$

sieht man, dass es einerlei ist, diese Reste zu nehmen, oder deren Complement zum Divisor, nämlich 4 und 5.

Nach §. 37. konnte man kürzer sogleich den Rest —1 selbst für N nehmen, wo dann $-1+30$ oder 29, $-1+2.30$, oder 59 etc. noch andere Zahlen giebt.

Nr. 39. Welche negativen Zahlen sind so beschaffen, dass sie mit 5 dividirt den Rest —1, mit 7 divid. den Rest —2 lassen?

Auflösung. Hier ist

$$N=-5x-1=-7y-2, \text{ oder}$$
$$-5x=-7y-1, \text{ folglich}$$
$$7y-5x=-1 \text{ und daraus findet sich}$$
$$y=5B+2.$$

Wenn also $B=0$, so ist $y=2$, folglich $N=-16$ u. s. w.

Die Bemerkung Hindenburg's *) ist daher wohl begründet, wenn er sagt:

„Das Wort Rest in der ausgedehntesten Bedeutung heisst nämlich, was bei der Division übrig bleibt, man mag nun den Quotienten in ganzen Zahlen, wie gewöhnlich, ganz erschöpfen, oder eine kleinere oder grössere Zahl dafür nehmen. Nimmt man eine kleinere Zahl zum Quotienten, als man nehmen könnte, so wird der Rest so gross oder grösser als der Divisor; nimmt man

*) Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik. Herausgegeben von Bernoulli und Hindenburg. 3. Stück. 1786. S. 293.

0 für den Quotienten, so wird der Rest dem Divisor gleich; nimmt man eine grössere Zahl als der Quotient nach der gewöhnlichen Division sein kann, so wird der Rest negativ und kann selbst grösser werden, als der Dividendus. Die Reduction eines solchen negativen Restes auf den zugehörigen kleinsten positiven, durch Addition des ein- oder vielfachen Divisors, fällt in die Augen.

Nr. 40. Peter ist dem Paul 12 Kreuzer schuldig; sie haben keine anderen Münzen als Siebener und Siebenzehner. Wie soll Peter den Paul bezahlen?

Auflösung. Peter gebe dem Paul x Siebener, dagegen gebe Paul dem Peter y Siebenzehner zurück. Es ist dann:

$$7x - 17y = 12.$$

Hieraus folgt: $y = 7B + 3$ und

$$x = 17B + 9.$$

Nimmt man $B = 0, \; 1, \; 2, \; 3$ etc.,

so ist $y = 3, \; 10, \; 17, \; 24 \ldots$

und $x = 9, \; 26, \; 43, \; 60 \ldots$

Nr. 41. Man verlangt zwei um 1 verschiedene Zahlen, von welchen die eine durch 17 und die andere durch 39 theilbar ist.

Auflösung. Die durch 17 theilbare Zahl hat die Form $17x$, die durch 39 theilbare die Form $39y$. Es ist also:

$$17x - 39y = 1.$$

Daraus folgt: $y = 17C - 7$

und $x = 39C - 16$.

Wenn daher $C = 1, \; 2 \ldots$

so ist $y = 10, \; 27 \ldots$

und $x = 23, \; 62 \ldots$

mithin ist $17x = 391, \; 1054 \ldots$

und $39y = 390, \; 1053 \ldots$

Nr. 42. Man soll diejenigen Werthe von x finden, für welche $(19x - 1) : 140$ eine ganze Zahl wird. (Gauss. Disqu. p. 20.)

Auflösung. Man setze

$$\frac{19x - 1}{140} = y, \text{ so ist}$$

$$19x - 140y = 1.$$

Die Auflösung dieser Gleichung giebt:

$$y = 19D + 8 \text{ und}$$

$$x = 140D + 59.$$

Wenn also $D = 0$, so ist $x = 59$ und $y = 8$ u. s. w.

Nr. 43. Aus der Auflösung einer unbest. Gleichung ergab sich

$$y = 17C - 7.$$

und $x = 39C - 16.$

Ein Schriftsteller giebt folgende Formeln für x und y:

$$y = 10 + 17n$$
$$x = 23 + 39n.$$

Es fragt sich 1) ob letztere Werthe aus den ersteren sogleich abgeleitet, und 2) wie man daraus die ursprüngliche Gleichung zwischen x und y herleiten könne?

Auflösung zu 1): Man setze $17C - 7 = 10 + 17n$, so folgt

$$C = 1 + n.$$

Nimmt man also $1 + n$ statt C, so wird

$y = 17C - 7 = 17 + 17n - 7 = 10 + 17n$ und ebenso
$x = 39C - 16 = 39(1+n) - 16 = 39n + 23.$

Zu 2): Die gesuchte Gleichung muss die Form

$$ax - by = c$$

haben, bei welcher (§. 22.) die Reihe der x-Werthe nach dem Exponenten b der anderen unbekannten Grösse y fortschreitet, sowie die der y-Werthe nach a.

Man hat also $17x = 17 \,.\, 39C - 17 \,.\, 16$
und $39y = 17 \,.\, 39C - 7 \,.\, 39$, folglich

$$17x - 39y = 1$$

und dies ist die ursprüngliche Gleichung.

Nr. 44. Eine Zahl zu finden, die mit einer Reihe von anderen Zahlen multiplicirt, immer Producte giebt, welche aus drei unter sich gleichen Ziffern bestehen und so beschaffen sind, dass die Summe der Ziffern eines jeden Productes gleich der Anzahl der Einheiten des Multiplicators ist. (Grüson, Algebra, Berlin 1821.)

Auflösung. Ist N die gesuchte Zahl, x der Multiplicator und y die einzelne im Producte vorkommende Ziffer, so hat man:

1) $N \,.\, x = 100y + 10y + y$, oder
$N \,.\, x = 111y$. Nach der 2ten Bed.

2) $x = 3y$, folglich

3) $3yN = 111y$, oder
$3N = 111$, mithin
$N = 37.$

Nach (2) ist $y = \frac{x}{3}$. Setzt man also

$$x = 3A, \text{ so folgt}$$
$$y = A.$$

Wenn also $A = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$
so ist $x = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.$

Man erhält demnach folgende Reihe:

37	37	37	37	37	37	37	37	37
3	6	9	12	15	18	21	24	27
111	222	333	444	555	666	777	888	999

Nr. 45. Von einer steigenden geometr. Progression ist das etzte Glied $t = 64$ und die Summe aller Glieder $S = 127$ gegeben. Gesucht wird das erste Glied $a = x$ und der Exponent $e = y$.

Auflösung. Bei der geometr. Progr. besteht die Formel für die Summe der n ersten Glieder:

$$S = \frac{et - a}{e - 1} \text{ d. i.}$$

$$127 = \frac{64y - x}{y - 1}; \text{ folglich ist}$$

$$x + 63y = 127.$$

Hieraus findet sich: $x = 63A + 1$, sowie
$$y = 2 - A.$$

Ist nun $A = 0, 1,$
so ist $y = 2, 1,$
und $x = 1, 64.$

Der letzte Werth $x = 64$ fällt weg, weil die Progr. steigend sein soll; es giebt also nur eine Auflösung.

Zusatz. Für $S = 381$ und $t = 192$ erhält man die Gleichung $189y = 381 - x$, aus welcher sich ergiebt:

$$x = 189A + 3$$
$$y = 2 - A.$$

Ist hier $A = 0, 1$
so ist $y = 2, 1$
$x = 3, 192.$

Es kann aber nur das erste Glied $= 3$ und der Expon. $= 2$ sein. Dieser Umstand giebt einen Wink, dass diese Aufgabe sich in eine bestimmte verwandelt, wie wir auch sogleich bei der folgenden Aufgabe sehen werden.

Nr. 46. Von einer geometr. Progression, deren Glieder sowie der Exponent ganze Zahlen sind, ist die Summe und das grösste Glied gegeben. Man verlangt das kleinste Glied und den Exponenten.

Auflösung. Es ist $S = \frac{et - a}{e - 1}$.

Nehmen wir nun $a = x$ und $e = y$, so hat man

$$S = \frac{yt - x}{y - 1}, \text{ oder}$$

$$Sy - S = ty - x, \text{ folglich}$$

$$(S - t)y + x = S.$$

Hieraus ergiebt sich: $y = \frac{S}{S - 1} - \frac{x}{S - t}$.

Diese letzte Gleichung hat aber offenbar die Form einer Divisionsgleichung, wo S den Dividendus, $S - t$ den Divisor, y den Quotienten und x den gebliebenen Rest darstellt, woraus folgender Lehrsatz hervorgeht:

„Wenn man bei einer steigenden geometrischen Progression die Summe der Glieder durch den Unterschied zwischen derselben und dem letzten Gliede dividirt, so kommt der Exponent heraus und das erste Glied bleibt als Rest.“

Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich auch leicht durch die wirkliche Division bei jeder beliebigen Anzahl von Gliedern der geometr. Progression, deren erstes Glied $= a$, deren Exponent $= e$ ist.

Nehmen wir z. B. die 6 ersten Glieder und setzen:

$$S = ae^5 + ae^4 + ae^3 + ae^2 + ae + a, \text{ so ist}$$

$$t = ae^5 \text{ und } S - t = ae^4 + ae^3 + ae^2 + ae + a, \text{ folglich}$$

giebt die Division von $\frac{S}{S - t}$, oder

$$ae^5 + ae^4 + ae^3 + ae + a]\ ae^6 + ae^5 + ae^4 + ae^3 + ae^2 + ae + a\ [e$$
$$\underline{ae^6 + ae^5 + ae^4 + ae^3 + ae^2 + ae}$$
$$\text{Rest } a$$

und so bei jeder anderen Anzahl von Gliedern.

Es sei z. B. $S = 118096$
und $t = 78732$, so ist

$S - t = 39364$.

Dividirt man hiermit in die Summe, so erhält man:

39364] 118096 [3
118092
Rest 4

Es ist also das erste Glied $a = 4$ und der Exponent $e = 3$.

Anmerkung. Mit gehöriger Einschränkung lässt sich dieses Verfahren auch auf solche Progressionen anwenden, bei welchen Brüche vorkommen.

Nr. 47. Durch welche Ziffer muss die Stelle von * in der dekadischen Zahl 10*1 ausgefüllt werden, wenn diese Zahl durch 3 theilbar werden soll?

Auflösung. Heisst die mit dem Sternchen bezeichnete Ziffer x, so ist: $10x1 = 1001 + 10x$.

Da aber diese Zahl durch 3 theilbar sein soll, so hat man:

$$1001 + 10x = 3y.$$

Hieraus folgt: $x = 3A - 2$.

Ist also $A = 1,\ 2,\ 3,$

so ist $x = 1,\ 4,\ 7.$

Mithin sind hier nur 3 Auflösungen möglich.

Nr. 48. Es ist eine arithmetische Progression gegeben. Man soll dasjenige Glied derselben angeben, welches durch eine gegebene Zahl theilbar ist. Es sei das erste Glied $= 3$, die Differenz oder der Exponent $= 19$; gesucht werden die Glieder, welche durch 17 theilbar sind.

Auflösung. Nennen wir das gesuchte Glied $= x$, so ist der bekannten Formel $t = a + (n - 1)d$ gemäss

$$3 + (x - 1)19 = 17y, \text{ oder}$$

$$19x - 17y = 16.$$

Aus dieser Gleichung findet sich:

$$x = 17B + 8.$$

Für $B = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$

ist $x = 8,\ 25,\ 42\ \ldots$

Es ist demnach das 8te Glied der Reihe, nämlich 136, zunächst durch 17 theilbar.

Nr. 49. Von einer anderen Progression ist das erste Glied $= 2$, der Exponent $= 3$; man verlangt 1) das nächste Glied, welches durch 13, und 2) das Glied, welches durch 15 theilbar ist.

Auflösung. Zu 1) Man erhält hier die Gleichung

$$2 + (x - 1)3 = 13y \text{ oder}$$

$$3x - 13y = 1, \text{ folglich}$$

$$x = 13A - 4.$$

Für $A = 1$ erhält man $x = 9$ u. s. w.

Zu 2) Ist unmöglich. (S. §. 20.)

Nr. 50. Von einer arithmetischen Progression ist das erste Glied $= 3$ und das 8te Glied durch 17 theilbar. Wie gross ist der Exponent dieser Reihe?

Auflösung. Ist der Exponent $= x$ und wird die durch 17 theilbare Zahl $= 17y$ gesetzt, so hat man die Gleichung

$$3+7x = 17y.$$

Daraus folgt: $x = 17B+2$.

Nimmt man $B = 0, 1, 2 \ldots$

so ist $x = 2, 19, 36 \ldots$

Probe. 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, **17** ...

3, 22, 41, 60, 79, 98, 117, **136** ...

Nr. 51. Wieviel Pariser Fuss à 144 Par. Linien und wieviel Rheinländische Fuss à 139 Par. Lin. muss man nehmen, damit zwischen ihnen ein Unterschied von einem Pariser Zoll stattfinde?

Auflösung. Man nehme x Par. und y Rheinl. Fuss, so entsteht die Gleichung:

$$144x - 139y = 12.$$

Hieraus ergiebt sich: $x = 139C+58$

$y = 144C+60$.

Für $C = 0, 1$ etc. findet man

$x = 58, 197$ etc.

$y = 60, 204$ etc. Es sind demnach in den kleinsten Zahlen:

58 Par.′ — 60 Rheinl.′ = 12‴ Par.; denn

58 Par.′ = 58 . 144 = 8352 Par.‴

und 60 Rheinl.′ = 60 . 139 = 8340 „

folglich der Unterschied = 12‴ oder 1 Par. Zoll.

Nr. 52. Umgekehrt, wieviel Rheinländische Fuss übertreffen eine gewisse Anzahl Pariser Fuss um einen Par. Zoll?

Auflösung. Man nehme x Rheinl. und y Par. Fuss, so erhält man: $139x - 144y = 12.$

Daraus folgt: $y = 139C - 58$

und $x = 144C - 60$.

Für $C = 1$ findet man $x = 84$ und $y = 81$.

Es sind daher: 84′ Rheinl. — 81′ Par. = 12‴ Par. oder

28′ Rheinl. — 27′ Par. = 4‴ Par.

Man kann demnach im Näherungswerthe setzen:

28 Rheinl. Fuss = 27 Par. Fuss.

Nr. 53. Eine Gesellschaft von 100 Personen wollte in einem Hôtel speisen. Der Wirth, ein eigener Mann, wollte die dazu nöthigen Flaschen Wein auf einem Tische in acht Reihen aufstellen, so dass in jeder Reihe gleich viel Flaschen ständen; da fehlten aber in drei Reihen eine Flasche. Er versuchte es, sie zu demselben Zwecke in neun Reihen zu stellen; da fehlten aber in acht Reihen eine Flasche. Ein Fremder, der dem Wirthe aufmerksam zugesehen hatte, fragte: Sie rechnen wohl auf jede Person eine Flasche? — „Dann blieben mir hier sehr viele übrig", antwortete der Wirth. So rechnen Sie wohl zwei Flaschen auf jede Person? — Dann fehlen mir hier noch einige. — Nun wieviel Flaschen haben Sie denn überhaupt da aufgestellt? „Sie wissen schon genug, rechnen Sie die Zahl selbst aus".

Auflösung. Der Wirth habe zuerst in jede Reihe x Flaschen gestellt; dann hatte er $8x-3$ Flaschen in diesen 8 Reihen zusammen. Das zweite Mal habe er y Flaschen in jede Reihe gestellt; dann ist offenbar die Gesammtzahl der Flaschen $9y-3$. Man erhält demnach die Gleichung:

$$8x-3=9y-8, \text{ oder}$$

$$8x-9y=-5.$$ Hieraus folgt nun

$x=9A+5$, sowie $y=8A+5$. Daher ist die Anzahl aller Flaschen: $8x-3=72A+43$.

Wenn also $A=0, \quad 1, \quad 2, \quad 3 \ldots$

so ist $x=5, \quad 14, \quad 23, \quad 32 \ldots$

und $8x-3=37, \; 109, \; 181, \; 253 \ldots$

Der Wirth hat also 181 Flaschen auf dem Tische gehabt, da er bei 100 Gästen à 1 Flasche, 81 über behält, dagegen bei 2 Flaschen à Person nur noch 19 fehlen.

Nr. 54. Ein Landwirth will ein rectanguläres Feld mit Bäumen besetzen, von denen er fast 300 Stück hat. Setzt er in jede Reihe 25 Stück, so bleiben ihm 19 übrig; pflanzt er aber in jede Reihe 30 Stück, so fehlen ihm noch 6 Stück, um die letzte Reihe vollständig zu machen. Wieviele Bäume hat er?

Auflösung. Er habe x Reihen à 25 Stück gepflanzt; so hat er 19 übrig. Daher ist die Anzahl der Bäume $=25x+19$. Setzt er aber y Reihen à 30 Stück, so fehlen ihm 6 Stück. Er hat also $30y-6$ Bäume, mithin ist

$$25x+19=30y-6.$$

Daraus folgt: $x=6A-1$ und $y=5A$.

Wenn daher $A = 1, \ 2, \ 3 \ldots$
so ist $x = 5, \ 11, \ 17 \ldots$
$y = 5, \ 10, \ 15 \ldots$
und $25x+19 = 144, \ 294, \ 444 \ldots$

Nr. 55. Ein Forstbedienter wird beauftragt, einem Deputatisten statt 60 Klafter $\frac{7}{4}$ elliger harter Scheite, eine Quantität weiche und harte $\frac{6}{4}$ elliger Scheite so abzugeben, dass bei letzteren derselbe Geldbetrag nach der bestehenden Taxe herauskommt, als wie bei ersteren 60 Klaft. Nun ist der Preis einer harten $\frac{7}{4}$ ellig. Klaft. 3 Thlr. 16 Ggr., bei einer harten $\frac{6}{4}$ ell. Klaft. 3 Thlr. und der einer weichen $\frac{6}{4}$ ellig. 2 Thlr. 8 Ggr. Wieviel Klaft. wird der Forstbed. von letztern beiden Sorten geben können?

Auflösung. Er gebe x Klaft. hartes und y Klaft. weiches Holz. Dann erhält man die Gleichung:

$$3x+2\tfrac{1}{3}y = 60 \,.\, 3\tfrac{2}{3}, \text{ oder}$$
$$9x+7y = 660.$$

Hieraus folgt: $y = 93 - 9B$ und $x = 7B+1$.

Wenn also: $B = 0, \ 1, \ 2 \ldots$
so ist $x = 1, \ 8, \ 15 \ldots$
und $y = 93, \ 84, \ 75 \ldots$

Nr. 56. Die Garnison in einer Festung kostet täglich 100 Fl. = 6000 Kr. zu unterhalten. Ein Cavallerist kostet täglich 21 Kr., ein Infanterist 9 Kr. Wie gross ist die Anzahl von jeder Gattung?

Auflösung. Sei die Anzahl der Inf. $= x$, die der Cavall. $= y$, so hat man: $9x+21y = 6000$, oder

$$3x+7y = 2000.$$

Hieraus folgt: $y = 3A+2$ und
$x = 662 - 7A$.

Wenn also $A = 0, \ 1, \ 2 \ldots\ldots 94$

so ist $\begin{cases} x = 662, \ 655, \ 648, \ldots\ldots 4 \\ y = 2, \ 5, \ 8, \ldots\ldots 284. \end{cases}$

Nr. 57. Man soll in den arithmetischen Progressionen

$21, \ 42, \ 63 \ \ldots\ldots$ (Expon. 21)
$9, \ 17, \ 25 \ \ldots\ldots$ (Expon. 8)

diejenigen Glieder finden, welche einander gleich sind.

Auflösung. Es sei dies in der 1sten Reihe das $x$te und in der 2ten Reihe das $y$te Glied, so hat man folgende Gleichung:

$$21+(x-1)21 = 9+(y-1)8 \text{ oder}$$
$$21x-8y = 1.$$

Daraus folgt: $x = 8D-3$ und $y = 21D-8$.

Für $D=1$ findet man $x = 5$ und $y=13$. Das 5te Glied der ersten Reihe ist $=105$ und ebenso ist das 13te Glied der 2ten Reihe $=105$ u. s. w.

Nr. 58. Es sind zwei arithmetische Progressionen gegeben:

I. 3, 8, 13 ..... (Exp. 5)

II. 0, 3, 6 ..... (Exp. 3).

Was muss man zu jedem Gliede von (I) und was zu jedem Gliede in (II) addiren, resp. subtrahiren, damit zwei neue Progressionen entstehen, bei welchen die reciproken Producte denselben Rest 9 geben, wie bei den Reihen I. und II.?

Auflösung. Zu jedem Gliede in I. werde x und zu jedem Gliede in II. werde y addirt, so erhält man folgende Gleichung (§. 59.)

$$(3+x)3-5y=9, \text{ oder}$$
$$3x-5y=0.$$

Es ist also: $x = 5A$ und $y = 3A$.

Für $A=1,\ 2,\ 3\ldots$

ist $\begin{cases} x=5,\ 10,\ 15\ldots \\ y=3,\ \ 6,\ \ 9\ldots \end{cases}$

Die beiden gesuchten Progressionen sind daher:

8, 13, 18 ...

und 3, 6, 9 ...

Nr. 59. 5 Pfund Wasser von x^0 Réaum. und
3 „ „ „ y^0 „ geben zusammengegossen 8 Pfund 50° warmes Wasser. Wieviel Grad können jene Mengen haben?

Auflösung. Nach der Richmann'schen Regel erhält man die Gleichung:

$$\frac{5x+3y}{8}=50, \text{ oder}$$
$$5x+3y=400.$$

Für $y=0$ erhält man $x=80$.

Wenn also $y=\ 0,\ 5,\ 10,\ 15\ldots$

so ist $x=80,\ 77,\ 74,\ 71\ldots$

In dieser Reihe kömmt auch natürlich der Fall vor, wo $x=y=50$ ist.

Nr. 60. Es will Jemand täglich 10 Meilen zurücklegen und seiner Gesundheit wegen ebensoviel vor der Mahlzeit als nach der

Mahlzeit zu Fuss gehen, dabei wo möglich sehr wenig fahren. Nun aber braucht derselbe gehend zu einer Meile 1 Stunde 40 Min., im Wagen aber dazu 1 Stunde 30 Min.; wieviel Stunden wird er daher täglich gehen und wieviel fahren müssen, um seinen vorgesetzten Zweck zu erreichen?

Auflösung. Er gehe täglich x Stund. und fahre y Stund., so erhält man die Gleichung:

$$\tfrac{3}{5}x + \tfrac{2}{3}y = 10, \text{ oder}$$
$$9x + 10y = 150.$$

Für $x = 0$ erhält man sogleich $y = 15$.

$$\text{daher: } \begin{cases} x = 0, \; 10, \; 20 \ldots \\ y = 15, \; 6, \; -3 \ldots \end{cases}$$

Wenn das Reisen nicht hin und her, sondern vorwärts gehen soll, so kann hier nur eine Auflösung stattfinden, nämlich 10 Stunden täglich gehen und 6 Stunden fahren.

(Aus Büchner's Sammlung algebraisch-physikalischer Aufgaben. Halle. 1836. p. 9.)

Nr. 61. Zur Decorirung eines Zimmers wünscht man die Wände (oder den Fussboden) mit regulären Zwölf- und Dreiecken von gegebener gemeinschaftlicher Seite auszulegen. Es wird gefragt, ob dies möglich sei und wie viele dieser Polygone an demselben Punkte aneinander zu legen sind?

Auflösung. Da der Eckwinkel des regul. Zwölfecks $= \tfrac{5}{3}R$ und der des gleichseitigen Dreiecks $= \tfrac{2}{3}R$, so bezeichne man die Winkelzahl von jeder Art, die in einem Punkte vereinigt sind, mit x und y; dann erhält man die Gleichung:

$$\tfrac{5}{3}x + \tfrac{2}{3}y = 4.$$

Hieraus folgt: $x = 2A$ und $y = 6 - 5A$, und die einzige Auflösung ist $x = 2$, $y = 1$.

Es ist demnach möglich, den Boden mit Zwölf- und Dreiecken zu bedecken, nur müssen von der ersten Gattung doppelt so viel, als von der zweiten genommen werden.

(Aus Ritt's Aufgaben über Geometr. u. Trigon. Stuttgart 1851.)

Nr. 62. Ein Franzose schuldet einem Holländer 31 Franken. Ersterer hat aber nur 5-Frankenstücke im Besitz; der Holländer hingegen führt nur halbe Ducaten bei sich, von denen jeder einen Werth von 6 Franken hat. Endlich entledigt sich der Franzose seiner Schuld auf die Art, dass er dem Holländer eine Anzahl 5-Frankenstücke giebt, dieser ihm aber so viele halbe Ducaten

zurückzahlt, dass er zuletzt noch 31 Franken, als den Betrag seiner Forderung von dem Franzosen in Händen hat. Wieviel Franken gab der Franzose dem Holländer und wieviel halbe Ducaten zahlte ihm dieser zurück?

Auflösung. Der Franzose habe x 5-Frankenstücke, der Holländer y halbe Ducaten à 6 Fr., so ist:

$$5x - 6y = 31.$$

Daraus folgt: $y = 5A - 1$ und $x = 6A + 5$.

Wenn also $A = 1, \ 2, \ 3 \ldots$
so ist $x = 11, \ 17, \ 23 \ldots$
und $y = 4, \ 9, \ 14 \ldots$

Nr. 63. Bei der Auflösung einer unbestimmten Gleichung mit 2 Unbekannten hatte Jemand für x die beiden benachbarten Werthe x', x'' und für y die zugehörigen y', y'' gefunden. Da aber die ursprüngliche Gleichung nicht mehr vorhanden ist, so wird gefragt, wie man dieselbe aus diesen Angaben herleiten könne?

Auflösung. Da $x = x', \ x''$ und
$y = y', \ y''$, so folgt nach §. 59., dass

$$x' \cdot y'' - x'' \cdot y' = c, \text{ sofern } \begin{cases} x'' > x' \\ y'' > y'. \end{cases}$$

Da nun $x'' - x' = b$ und $y'' - y' = a$, so ist die gesuchte Gleichung

$$ax - by = c.$$

Ist dagegen $x'' > x'$ und $y'' < y'$, so erhält man die Gleichung:

$$ax + by = c.$$

Es sei z. B.: $x = 11, \ 18$
$y = 15, \ 25$, so ist

$$11 \times 25 - 15 \times 18 = 5 = c.$$

Ferner ist: $18 - 11 = 7 = b$ und $25 - 15 = 10 = a$. Daher hat die Gleichung $ax - by = c$ die besondere Form:

$$10x - 7y = 5.$$

Nr. 64. Aus den beiden unmittelbar aufeinander folgenden Werthen für x und y, nämlich $x = 16, \ 5$ und $y = 8, \ 15$, die ursprüngliche Gleichung wieder herzustellen.

Auflösung. Diesen Werthen entspricht die Form der gesuchten Gleichung:

$$ax + by = c.$$

Nun ist $16 \cdot 15 - 8 \cdot 5 = 200$;
$16 - 5 = 11$ und $15 - 8 = 7$, also die gesuchte Gleichung:

$$7x + 11y = 200.$$

Nr. 65. Man soll die Gleichungen:

$$1)\quad \frac{x}{3} = y + \tfrac{1}{3},$$

$$2)\quad \frac{x}{5} = z + \tfrac{2}{5}$$

nach der positiven ganzen Zahl x auflösen.

Auflösung. Aus 1. folgt: $x = 3y + 1$
aus 2. „ $x = 5z + 2$.

Es ist also: $3y + 1 = 5z + 2$. Hieraus findet man $z = 3B + 1$; $y = 5B + 2$ und $x = 15B + 7$.
Für $B = 0$ ist also $x = 7$ die kleinste Zahl.

Nr. 66. Gegeben $\begin{cases} 1)\quad \frac{x}{8} = y + \frac{5}{8} \\ 2)\quad \frac{x}{11} = z + \frac{4}{11}. \end{cases}$

Auflösung. Man erhält:
$8y - 11z + 1 = 0$. Daraus folgt:
$z = 8C + 3$; mithin $x = 88C + 37$.
Für $C = 0$ ist also $x = 37$.

Nr. 67. Gegeben $\begin{cases} 1)\quad \frac{x}{9} = y \\ 2)\quad \frac{x}{14} = z + \frac{8}{14}. \end{cases}$

Auflösung. Es ist: $9y = 14z + x$. Daraus erhält man: $z = 9C - 7$; $y = 14C - 10$ und $x = 126C - 90$.
Für $C = 1$ ist $x = 36$.

Nr. 68. Gegeben $\begin{cases} 1)\quad \frac{x}{3} = y + \frac{2}{3} \\ 2)\quad \frac{x}{7} = z + \frac{3}{7} \\ 3)\quad \frac{x}{10} = v + \frac{9}{10}. \end{cases}$

Auflösung. Aus 1. und 2. folgt:
$3y = 7z + 1$. Die Auflösung dieser Gleichung giebt: $z = 3A - 1$ und $y = 7A - 2$.
Aus 3. folgt: $x = 10v + 9$ und, da nach 1) $x = 21A - 4$, so findet man: $A = 10B + 3$ und mithin:

$$x = 210B + 59,$$

wo für $B = 0$ der kleinste Werth $x = 59$ ist.

Nr. 69. Gegeben: $\begin{cases} 1) & 3w - 2x = 36 \\ 2) & 2w - 3y = 24 \\ 3) & 7y - 4z = 20. \end{cases}$

Man verlangt die Werthe von x, y, z, w in positiven ganzen Zahlen.

Auflösung. Aus 1) und 2) folgt:

$$9y - 4x = 0, \text{ also}$$

$$4) \quad y = \tfrac{4}{9}x.$$

Dieser Werth in 3) gesetzt, giebt:

$$5) \quad x = \frac{9z + 45}{7} = z + 6 + \frac{2z + 3}{7}$$

und $z = 7B + 2$. Daraus folgt ferner:

$x = 9(1 + B)$, mithin nach 4):

$y = 4(1 + B)$. Endlich ergiebt sich aus 1):

$w = 6(3 + B)$.

Wenn also:	$B =$	0,	1,	2,	3 ...
so ist	$x =$	9,	18,	27,	36 ...
	$y =$	4,	8,	12,	16 ...
	$z =$	2,	9,	16,	23 ...
	$w =$	18,	24,	30,	36 ...

Auflösung 2. Aus 1) folgt:

$x = w - 18 + \frac{w}{2}$. Setzt man

4) $w = 2A$, so ist

$x = 3A - 18$. Aus 2) und 4 folgt

$y = A - 8 + \frac{A}{3}$. Setzt man

$A = 3B$, so ist

5) $y = 4B - 8$, folglich wird

$x = 9B - 18$

$w = 6B$ und nach 3) und 5) ist

$z = 7B - 19$,

wobei B nicht unter 3 angenommen werden darf.

Anmerkung. Diese Werthe fallen mit den vorigen zusammen, wenn man $B = n - 3$ setzt; alsdann wird:

$$x = 9 + 9B = 9n - 18$$

$$y = 4 + 4B = 4n - 8$$

$$z = 2+7\beta = 7n - 19$$
$$w = 18+6\beta = 6n.$$

Auflösung 3. Da die Coefficienten von w, x, y, z in den letzten Gliedern aufgehen, so setze man:

in (1) für $x=0$, so ist $8w = 96$, also $w = 12$
in (2) für $y=0$, so ist $2w = 24$, also $w = 12$
in (3) für $y=0$, so ist $4z = -20$, also $z = -5$.

Aus der Gleichung (3) folgt, dass die Werthe von z um 7 zunehmen, also auch die von y um 4. Da nun die Werthe von w den beiden ersten Gleichungen entsprechen müssen, so bilden sie eine Reihe, welche um 6 zunimmt, während die Werthe für x um 9 zunehmen. S. §. 22.

Anmerkung. Die Gleichungen 1) und 2) verwandle man in folgende:
$$9w - 6x = 108$$
$$4w - 6y = 48.$$

Ist nun α irgend ein Werth von x, so ist die allgemeine Formel für
$$x = \alpha + 9n.$$
Ebenso findet man: $y = \beta + 4n$
$$z = \gamma + 7n$$
und $w = \delta + 6n$,

wodurch sogleich eine allgemeine Auflösung gefunden ist, wenn nur α, β, γ, δ zuvor; wie vorhin bestimmt worden sind.

Nr. 70. Vier Zahlen von der Eigenschaft zu finden, dass die Summe der beiden ersten, der dritten Zahl und ihre Differenz der vierten Zahl gleich sei.

Auflösung. Sind die vier Zahlen x, y, z, t, so hat man:

1) $x + y = z$
2) $x - y = t$. Hieraus folgt:
3) $x = t + y$. Dies in (1) substituirt, giebt; 4) $2y + t = z$, folglich:
5) $y = \frac{z-t}{2}$. Setzt man diesen Werth von y in (3), so erhält man: 6) $x = \frac{z+t}{2}$

Man kann nun die Zahlen z und t beliebig annehmen. Es sei z. B.: $z = 8$ und $t = 2$; so ist $x = 5$ und $y = 3$.
Sei ferner: $z = 5$ und $t = 1$; so ist $x = 3$ und $y = 2$.

Verlangt man nur ganze Zahlen für x, y, z, t, so müssen

für s und t solche Werthe genommen werden, deren Summe und Differenz durch 2 theilbar sind.

Nr. 71. Eine Frau trug einen Korb voll Eier in die Stadt zum Verkauf, traf aber mit Jemand zusammen, der die Eier zerbrach. Die Frau klagte auf Schadenersatz und der Richter verurtheilte den Uebelthäter zum Bezahlen sämmtlicher Eier, sobald die Frau angeben könne, wieviel sie gehabt habe. Sie erinnerte sich, dass beim Einzählen der Eier in den Korb zu zweien, dreien, vieren, fünfen und sechsen immer 1 übrig geblieben sei, aber beim Einzählen zu 7 kein Rest geblieben wäre. Wieviele Eier waren es?

Auflösung. Die reguläre Auflösung ergiebt folgende Gleichungen:

$$2x+1=3y+1=4z+1=5t+1=6u+1=7v.$$

Nach §. 37. lässt sich jedoch kürzer eine Zahl N finden, welche den 5 ersten Bedingungen entspricht. Es ist nämlich:

$N=60A+1$. Man setze nun

$7v=60A+1$ und suche v. Dann ist

$v=8A+\frac{4A+1}{7}$. Man erhält endlich

$N=420D-119$.

Ist also $D=1,\ 2\ldots$

so wird $N=301,\ 721\ldots$

Nr. 72. Jemand kauft 30 Stämme Eichen, Erlen und Kiefern für 100 ₰. Eine Eiche kostet 6 ₰, eine Erle 1 ₰ und eine Kiefer 4 ₰; wieviele Stämme waren es von jeder Gattung?

Auflösung. Es seien x Eichen, y Erlen und z Kiefern, so hat man:

1) $x+y+z=30$.

2) $6x+y+4z=100$.

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$y=16-\frac{2z}{5}$. Setzt man $z=5A$, so wird

$x=14-3A,\ y=16-2A$.

Wenn daher $A=1,\ 2,\ 3,\ 4,$

so ist $x=11,\ 8,\ 5,\ 2$

$y=14,\ 12,\ 10,\ 8$

$z=5,\ 10,\ 15,\ 20$.

Auflösung 2. Aus den Gleichungen y eliminirt, erhält man:

$$5x+4z=70.$$

Man setze $z=0$, so ist $x=14$, folglich:

$$x = 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17 \ldots$$
$$z = 20,\ 15,\ 10,\ 5,\ 0,\ -5 \ldots$$
$$30-(x+z)=y = 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18 \ldots$$

Nr. 73.*) Unter eine gewisse Anzahl Arme, welche mehr als 10, aber noch nicht 20 beträgt, soll der Ertrag einer Sammlung vertheilt werden. Vor der Vertheilung entschliesst man sich jedoch, noch 5 Arme daran Theil nehmen zu lassen und noch soviel Geld aufzubringen, dass Jeder ebensoviel erhält, als es bei der anfangs beabsichtigten Vertheilung der Fall gewesen wäre. Ohne die zweite Sammlung würde der Einzelne 19 Pf. weniger bekommen haben. Es fragt sich nun: 1) Wie gross war anfangs die Zahl der Empfänger? 2) Wieviel erhält Jeder? 3) Wieviel musste bei der zweiten Sammlung einkommen?

Auflösung. Die Anzahl der anfänglichen Armen sei $=x$, die erste Vertheilungssumme $=y$ Pf., die nachträgliche $=z$.

Es ist also: 1) $\frac{y}{x}=\frac{y+z}{x+5}$. Daraus folgt:

2) $5y = xz$, also $y=\frac{xz}{5}$.

Wenn nun ein Armer bei der ersten Summe 19 Pf. weniger erhält, so werden alle $x+5$ Arme offenbar $19(x+5)$ Pf. weniger, d. i. z Pf. weniger erhalten.

Daher ist: 3) $19x+95=z$.

Wenn also $x = 5,\ 10,\ 15,\ 20 \ldots$

so ist $z = 190,\ 285,\ 380,\ 475 \ldots$

und $y = 190,\ 570,\ 1140,\ 1900 \ldots$

Da nun $x > 10$ und < 20 sein soll, so giebt es hier nur eine Auflösung, nämlich 15 Arme ($=x$) und 1140 Pf. war die erste Summe und 380 Pf. betrug die zweite Sammlung.

Nr. 74. Man ist im Stande, die Peripherie eines Kreises mit Hülfe einer elementar-geometrischen Construction in 3, 5 und 17 gleiche Theile zu theilen. Wie bestimmt man mit Hülfe dieser Theile $\frac{1}{51}$, $\frac{1}{85}$ und $\frac{1}{255}$ der Peripherie eines Kreises?

Auflösung. Setzt man die Peripherie $=1$, so erhält man die Gleichungen:

*) Illustr. Zeit. Nr. 67. 1844, woselbst man eine andere Auflösung nachsehen kann.

$$\text{I.}\quad \frac{x}{3} - \frac{y}{17} = \tfrac{1}{51},$$

$$\text{II.}\quad \frac{x_1}{5} - \frac{y_1}{17} = \tfrac{1}{85} \text{ und}$$

$$\text{III.}\quad \frac{x_{,,}}{15} - \frac{y_{,,}}{17} = \tfrac{1}{255}.$$

Aus I. oder $17x - 3y = 1$ folgt:

$$x = 3B - 1; \quad y = 17B - 6.$$

Wenn daher $B = 1, \quad 2 \ldots\ldots$

so ist $\begin{cases} x = 2, & 5 \ldots \\ y = 11, & 18 \ldots \end{cases}$

Aus II. oder $17x_1 - 5y_1 = 1$ folgt:

$$x_1 = 5B - 2 \text{ und } y_1 = 17B - 7.$$

Wenn also $B = 1, \quad 2 \ldots\ldots$

so ist $\begin{cases} x_1 = 3, & 8 \ldots\ldots \\ y_1 = 10, & 27 \ldots\ldots \end{cases}$

Aus III oder $17x_{,,} - 15y_{,,} = 1$ folgt:

$$x_{,,} = 15B - 7; \quad y_{,,} = 17B - 8.$$

Wenn also $B = 1, \quad 2 \ldots$

so ist $x_{,,} = 8, \quad 23 \ldots$

$y_{,,} = 9, \quad 26 \ldots$

Bezeichnet man nun die Peripherie mit p, so ist

$\tfrac{1}{51}p = \tfrac{2}{3}p - \tfrac{11}{17}p$; $\tfrac{1}{85}p = \tfrac{3}{5}p - \tfrac{10}{17}p$; $\tfrac{1}{255}p = \tfrac{8}{15}p - \tfrac{9}{17}p$,

zu welchen noch andere Werthe gefunden werden können.

Nr. 75. In einer Rechnung steht Folgendes:

1 Elle : 1 ℛ 1* Gr. = 5*4 Ellen : *61 ℛ. Da wo ein * steht, sind die Ziffern unkenntlich oder verwischt. Was waren das für Zahlen?

Auflösung. Man hat hier 3 unbek. Grössen einzuführen, womit sich die gegebene Proport. in folgende verwandelt:

1 Elle : $34 + x$ Gr. $= 504 + 10y$ Elle : $2400z + 1464$ Gr.

Daraus folgt:

$$2400z + 1464 = (34 + x)(504 + 10y)$$

$$= 504(34 + x) + 10y(34 + x).$$

Da nun das Product $10y(34 + x)$ nothwendig mit einer Null endigt, so muss das Product $504(34 + x)$ mit einer 4 endigen. Diess kann aber nur stattfinden, wenn x entweder $= 2$, oder $= 7$ ist. Setzt man $x = 2$, so erhält man, nach gehöriger Reduction

$60z - 9y = 417$, oder

$$y = \frac{60z - 417}{9}.$$

Für $z = 8$ wird y zu einer ganzen Zahl $= 7$.

Für $x = 7$ wird $240z - 41y = 1920$, folglich, da 240 in 1920 aufgeht, so findet man $y = 0$ und $z = 8$, welche beiden Werthe der Aufgabe Genüge leisten.

Nr. 76. Man soll aus 10pfündigem, 4pfünd. und 3pfünd. Zinn 20 Pfund 5pfündiges Zinn zusammensetzen. Wie viel muss von jeder Sorte genommen werden?

Auflösung. Unter $n$pfündigem Zinn versteht man dasjenige, welches zu 1 Pfd. Blei $n - 1$ Pfd. reines Zinn enthält; so ist z. B. 10pfündiges Zinn dasjenige, welches auf 9 Pfd. Zinn 1 Pfd. Blei besitzt (feineres als 10pfündiges pflegt nicht verarbeitet zu werden).

Man nehme nun x Pfd. vom 10pfündigen
y - - 4 -
z - - 3 - ,

so erhält man folgende Gleichungen:

$$\text{I)}\quad x + y + z = 20$$

$$\text{II)}\quad \tfrac{9}{10}x + \tfrac{3}{4}y + \tfrac{2}{3}z = 16, \text{ oder}$$

$$54x + 45y + 40z = 960.$$

Eliminirt man y, so ergiebt sich

$$9x - 5z = 60.$$

Da 5 in 60 aufgeht, so setze man $z = 0$ und man bekömmt

	$x =$	0,	5,	10,	15 . . .
	$z =$	-12,	-3,	6,	15 . . .
also	$y =$	32,	18,	4,	-10 . . .

Es besteht demnach nur eine Auflösung, nämlich:

$$x = 10;\quad y = 4 \text{ und } z = 6.$$

Nr. 77. Eine unbestimmte Aufgabe enthält die Gleichungen:

$$1)\quad 5x - 2y + z = 110$$

$$2)\quad 2x + 3y - z = 100$$

und gestattet weder Null noch negative Werthe für die Unbekannten. Es sollen theils die Grenzen der Unbekannten bestimmt, theils einige Auflösungen der Aufgabe gegeben werden.

Auflösung. Addirt man (1) zu (2), so erhält man

$$3)\quad 7x + y = 210.$$

Hieraus folgt: $y = 7 \cdot A$

$x = 30 - A$ und

$$z = 19A - 40.$$

Eliminirt man x aus (2) und (1), so kömmt

$$4)\quad 19y - 7z = 280.$$

Aus (1) und (4) folgt nun leicht, dass

$x < 36 \qquad y < 210 \qquad z > 0$

$x < 27\frac{11}{19}. \qquad y > 14\frac{14}{19}. \qquad z < 530.$

Wenn nun $A =$	3,	4,	5	29
so ist: $x =$	27,	26,	25	1
$y =$	21,	28,	35	203
$z =$	17,	36,	55	511.

Nr. 78. Man soll aus der Gleichung

$$4x + 9y + 10z = 103$$

die allgemeinen Werthe für x, y und z finden.

Auflösung.

Es ist 1) $z = z$

2) $y = 4w + 3 - 2z$

3) $x = 19 - 9w + 2z$.

Nr. 79. Man soll die Zahl 100 in drei Theile theilen, von der Art, dass, wenn man den ersten mit 17, den zweiten mit 11, den dritten mit 3 multiplicirt und hierauf diese Producte addirt, die Summe = 880 sei. Wie gross sind die Theile?

Auflösung. Sind x, y, z diese Theile, so erhält man die Gleichungen:

1) $17x + 11y + 3z = 880$ und

2) $x + y + z = 100$.

Eliminirt man z und setzt $A = 3B - 2$, so erhält man

$$x = 4B - 2 \text{ und } y = 76 - 7B.$$

Für $B =$	1,	2,	3 ...
ist $x =$	2,	6,	10 ...
$y =$	69,	62,	55 ...
$z =$	29,	32,	35 ...

Nr. 80. Man soll die kleinste Zahl finden, welche durch

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

dividirt, beziehlich die Reste

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 giebt.

Auflösung. Diese ergiebt sich sehr leicht aus dem im 1. Cap. bewiesenen Lehrsatze. Ist also N die gesuchte Zahl, so erhält man $N = 1.2.3.4.5.6.7.8.9 - 1$; aber wegen der gemeinschaftlichen Factoren wird

$$N = 2520 - 1 = 2519,$$

welche Zahl das Verlangte leistet.

Nr. 81. Ein Forstmann hat eine gewisse Anzahl Ahorne, Ulmen und Eschen zu verpflanzen, die jedoch zusammen noch nicht 1000 Stück betragen; will er solche in 7 Reihen verpflanzen, so bleiben ihm 3, will er sie in 5 Reihen verpflanzen, so bleiben ihm 2, will er sie aber in 9 Reihen verpflanzen, so bleiben ihm 5 übrig; wie viele Pflanzen können es gewesen sein?

Auflösung. Er setze x Bäume in jede der 7 Reihen, so ist die Anzahl der Bäume $= 7x + 3$. Nimmt er y Bäume in 5 Reihen, so ist diese Anzahl $= 5y + 2$, und nimmt er z Bäume in 9 Reihen, so ist sie $= 9z + 5$. Es ist also

$$7x + 3 = 5y + 2 = 9z + 5.$$

Aus der Vergleichung der beiden ersten Ausdrücke findet man $x = 5B + 2$ und $7x + 3 = 35B + 17$. Diess mit dem dritten Ausdrucke verglichen, ergiebt: $B = 9D + 3$, sowie $z = 35D + 13$. Daher ist die Anzahl der Bäume $= 9z + 5 = 315D + 122$; sie kann daher nur 437, oder 752 betragen.

Nr. 82. Man sucht 3 Zahlen, welche den beiden Gleichungen entsprechen: 1) $3x + 5y + 7z = 560$.
2) $9x + 25y + 49z = 2920$.

Auflösung. Nach Eliminirung von x erhält man

$$5y + 14z = 620.$$

Daraus folgt $x = 35B - 20$; $y = 124 - 42B$ und $z = 15B$.

Wenn daher $B = 1, \quad 2,$
so ist $x = 15, \quad 50.$
$y = 82, \quad 40.$
$z = 15, \quad 30.$

Nr. 83. Es werden vier ganze Zahlen gesucht, deren Summe 1000 beträgt. Wenn man je zwei derselben addirt, so kommen 6 Zahlen in arithmetischer Progression.

Auflösung. Sind x, y, z, u die 4 gesuchten Zahlen, so hat man folgende Gleichungen:

$$x + y = a$$
$$x + z = a + d$$
$$x + u = a + 2d$$
$$y + z = a + 3d$$
$$y + u = a + 4d$$
$$z + u = a + 5d,$$ folglich

$$\frac{3x + 3y + 3z + 3u = 6a + 15d,}{x + y + z + u = 2a + 5d = 1000.} \text{ oder}$$

Hiernach findet man $d = 2t$ und $a = 500 - 5t$.

Wenn also $t = 1, \quad 2, \quad 3 \ldots.$

so ist $a = 495, \quad 490, \quad 485 \ldots.$

$d = 2, \quad 4, \quad 6 \ldots.$

Da für a nur gerade Zahlen gelten können, so wird, wenn $a = 490$ und $d = 4$:

$$x + y = 490$$
$$x + z = 494$$
$$x + u = 498$$
$$y + z = 502$$
$$y + u = 506$$
$$z + u = 510,$$ woraus sich leicht ergiebt:

$x = 241, \quad y = 249, \quad z = 253, \quad u = 257$ u. a. m.

Nr. 84. Man will für 100 Thlr. insgesammt 100 Pfd. Waare, nämlich das Pfund zu 10 Thlr., 5 Thlr., 2 Thlr. und $\frac{1}{2}$ Thlr. kaufen. Wie viel Pfunde kann man von jeder Sorte in ganzen Pfunden erhalten?

Auflösung. Man setze der Reihe nach x, y, z, u Pfd., so hat man:

1) $x + y + z + u = 100.$

2) $10x + 5y + 2z + \frac{1}{2}u = 100.$ Hieraus folgt:

3) $19x + 9y + 3z = 100.$

Es ist also $9y + 3z = 100 - 19x$. Für $x = 1$ und 4 erhalten y und z positive Werthe. Man findet nämlich

für $x =$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$y =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$z =$	24	21	18	15	12	9	6	3	0
$u =$	74	76	78	80	82	84	86	88	90.

Setzt man ferner

$x =$	4	4	4	...
so ist $y =$	1	2	3	...
$z =$	5	2	-1	...
$u =$	90	92	94	...

Nr. 85. Es kauft Jemand 50 Stück Vieh, Ochsen, Schweine und Kälber, für 684 Thlr.; und zwar einen Ochsen zu 40 Thlr., ein Schwein zu 8 Thlr. und ein Kalb zu 3 Thlr. Wie viel Stück hat er von jeder Art bekommen?

Auflösung. Er habe x Ochsen, y Schweine und z Kälber gekauft, so ist: 1) $x + y + z = 50$.

2) $40x + 8y + 3z = 684$.

Hieraus ergeben sich die allgemeinen Werthe

$$x = 7 + 5t$$
$$y = 55 - 37t$$
$$z = 32t - 12.$$

Wenn also	$t =$	0,	1,	2
so ist	$x =$	7,	12,	17
	$y =$	55,	18,	-19
	$z =$	-12,	20,	52.

Nr. 86. Man verlangt eine vierziffrige Zahl, in welcher die erste Ziffer links zur letzten addirt 8 giebt; die zweite und dritte zusammen 7 geben; und dass die Summe der ersten und dritten $\frac{2}{3}$ von der Summe der beiden andern sei.

Auflösung. Sind x, y, z, u die gesuchten Ziffern, so hat man 1) $x + u = 8$

2) $y + z = 7$

3) $x + z = \frac{2}{3}(y + u)$, oder

4) $3x + 3z - 2u - 2y = 0$. Nun ist die doppelte Summe von (1) und (2): $2x + 2z + 2u + 2y = 30$, folglich

$5x + 5z = 30$, oder

$x + z = 6$. Subtrahirt man diese Glg. von (2), so erhält man $y - x = 1$ oder $x = y - 1$. Ebenso findet man leicht $z = 7 - y$ und $u = 9 - y$.

Setzt man also	$y =$	2,	3,	4,	5,	6,	7,
so ist	$x =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,
	$z =$	5,	4,	3,	2,	1,	0,
	$u =$	7,	6,	5,	4,	3,	2.

Die gesuchten Zahlen können daher sein:

1257, 2346, 3435, 4524, 5613, 6702.

Nr. 87. Jemand macht einen Einkauf an Kaffee zu 16 Ggr., und Thee zu 3 Thlr. das Pfund, und Zucker à Pfd. 12 Ggr. Im Ganzen bezahlt er 25 Thlr. Wie viel Pfd. Thee, Kaffee und Zucker hat er gekauft?

Auflösung. Er habe x Pfd. Thee, y Pfd. Kaffee und z Pfd. Zucker gekauft, so ist:

$72x + 16y + 12z = 600$, oder

$18x + 4y + 3z = 150$, also

$$z = 50 - 6x - \frac{4y}{3}.$$

Setzt man $y = 3A$, so ist $\frac{4y}{3} = 4A$, daher

$$z = 50 - 6x - 4A.$$

Wenn also $A =$	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,
und $x =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,
so ist $z =$	40,	34,	28,	22,	16,	10,	4,
$y =$	3,	3,	3,	3,	3,	3,	3.

Für $A = 1$ und $x > 7$ werden alle folgenden Werthe von z negativ. Eben solche Gruppen von Auflösungen ergeben sich, wenn man $A = 2, 3, 4$ etc. setzt.

Nr. 88. Wie viel 4-, 8- und 12-Groschenstücke kann man für 2 preuss. Thaler erhalten?

Auflösung. Ist die Anzahl der Viergroschenstücke $= x$, die der 8-Gr. $= y$ und die der 12-Gr.-Stücke $= z$, so erhält man:

$$4x + 8y + 12z = 48,$$
$$x + 2y + 3z = 12,$$

folglich $x = 12 - 2y - 3z$, Hiernach finden sich die entsprechenden Werthe:

$y =$	1,	1,	2,	2	etc.
$z =$	0,	1,	0,	1	-
$x =$	10,	7,	8,	5	-

Nr. 89. In 4 Cassen liegt Geld. Vermehrt sich in der ersten Casse die Zahl der Münzen (x) um t, so ist ihr Inhalt fünf Drittel so gross als der der zweiten; erhielte die zweite Casse (y) diesen Zuwachs, so würde ihr Inhalt = dem Doppelten der dritten sein; erhielte aber die dritte Casse (z) diesen Zuwachs, so würde ihr Inhalt = dem dreifachen Inhalt (u) der vierten sein. Welchen Inhalt haben die Cassen?

Auflösung. Man erhält für diese 6 Unbek. folgende 3 Gleichungen:

1) $x + t = \frac{5}{3}y$

2) $y + t = 2z$

3) $z + t = 3u$.

Aus 2 und 3 folgt: $y - z = 2z - 3u$; daher ist

$u = \frac{3z - y}{3} = z - \frac{y}{3}$. Setzt man $y = 3A$, so wird

$u = z - A$, diess in (3) subst. giebt $t = 2z - 3A$.

Ferner wird $x = -2z + 8A$.

Nimmt man also $\begin{cases} A = 1 \ldots\ldots 100 \\ z = 2 \ldots\ldots 300 \end{cases}$

so ist: $x = 4 \ldots\ldots 200$
$y = 3 \ldots\ldots 300$
$u = 1 \ldots\ldots 200$
$t = 1 \ldots\ldots 300$ u. s. w.

Nr. 90. Eine Bauerfrau hat Gänse (x), Hühner (y), Enten (z) und Tauben (t), insgesammt 140 Stück verkauft, jede Gans zu 10, jedes Huhn zu 6, jede Ente zu 4, jede Taube zu 2 Mgr. und dafür 26 ℛ 24 Mgr. gelöst; wie viel Stück hatte sie von jedem?

Auflösung. Man hat folgende Gleichungen:

$$1)\quad x + y + z + t = 140$$
$$2)\quad 10x + 6y + 4z + 2t = 960.$$

Eliminirt man t, so bleibt:

$$3)\quad 4x + 2y + z = 340.$$ Es ist also

$$4)\quad x = \frac{340}{4} - \frac{2y}{4} - \frac{z}{4}.$$

Setzt man $y = 2A$ und $z = 4B$, dann ist

$$5)\quad x = 85 - A - B,$$ wo dann $A + B < 85$ sein muss.

Für $A = B$ wird $x = 85 - 2B$; $y = 2B$; $z = 4B$ und $t = 55 - 4B$. Es darf daher B nicht grösser sein als 13.

Man erhält hiernach folgende 13 Auflösungen:

$B =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$x =$	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59
$y =$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
$z =$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52
$t =$	51	47	43	39	35	31	27	23	19	15	11	7	3.

Für $A = 2B$ erhält man wieder eine Gruppe von 10 Auflösungen. Für $A = 4B$ findet man 7 andere Auflösungen u. s. w.

Nr. 91. Ich habe 4 Zahlen; wenn ich x mit $2\frac{1}{2}$, y mit $2\frac{2}{3}$, z mit $3\frac{3}{4}$ und t mit $4\frac{4}{5}$ multiplicire und alles addire, so kommen jedesmal 120. Welche Zahlen sind es?

Auflösung.

Es ist $2\frac{1}{2}x + 2\frac{2}{3}y + 3\frac{3}{4}z + 4\frac{4}{5}t = 120 \quad (60$

folgl. $150x + 160y + 225z + 288t = 7200.$

$$x = 48 - y - z - t - \frac{10y + 75z + 138t}{150}.$$

Sei $10y + 75z + 138t = 150A$, so ist

$$y = \frac{150A - 75z - 138t}{10} = 15A - 7z - 13t - \frac{5z + 8t}{10}.$$

Sei ferner $5z + 8t = 10B$, so ist $z = \dfrac{10B - 8t}{5} = 2B - \dfrac{8t}{5}$.

Setzt man $t = 5C$, so ist $\dfrac{8t}{5} = 8C$, also $z = 2B - 8C$. Hiernach findet man endlich

$$\begin{aligned} x &= 48 - 16A + 13B + 12C \\ y &= 15A - 15B - 9C \\ z &= 2B - 8C \\ t &= 5C, \end{aligned}$$

wobei $B > 4C$ und $A > B + \frac{9}{15}C$ angenommen werden muss.

Wenn daher	$A =$	6,	7 . . .
	$B =$	5,	5 . . .
	$C =$	1,	1 . . .
so ist	$x =$	29,	13 . . .
	$y =$	6,	21 . . .
	$z =$	2,	2 . . .
	$t =$	5,	5 . . .

Probe.

$29 \cdot 2\frac{1}{2} = 72\frac{1}{2}$	$13 \cdot 2\frac{1}{2} = 32\frac{1}{2}$
$6 \cdot 2\frac{2}{3} = 16$	$21 \cdot 2\frac{2}{3} = 56$
$2 \cdot 3\frac{3}{4} = 7\frac{1}{2}$	$2 \cdot 3\frac{3}{4} = 7\frac{1}{2}$
$5 \cdot 4\frac{4}{5} = 24$	$5 \cdot 4\frac{4}{5} = 24$
120.	120.

Nr. 92. Es sollen 4 Zahlen von folgenden Eigenschaften gefunden werden: ihre Summe soll $= 18$, und die Summe der ersten, doppelten 2ten, 3 fachen dritten und 4 fachen $4^{ten} = 50$ sein.

Auflösung. Sind diese Zahlen nach der Reihe x, y, z, t, so ist

$$1)\quad x + y + z + t = 18$$
$$2)\quad x + 2y + 3z + 4t = 50.$$

Subtrahirt man beide Gleichungen, so hat man:

$$y + 2z + 3t = 32, \text{ folglich}$$

$z = \dfrac{32 - 3t - y}{2} = 16 - t - \dfrac{t + y}{2}$. Sei $t + y = 2A$, so wird

$y = 2A - t$ und $z = 16 - t - A$, sowie $x = 2 + t - A$.

Wenn also $A =$	1,	4,	4	
$t =$	1,	6,	5	
so ist $x =$	2,	4,	3	u. s. w.
$y =$	1,	2,	3	
$z =$	14,	6,	7.	

Nr. 93. Ein aufrecht stehendes Quadrat ist durch zwei Vertical- und Horizontallinien in 9 Fächer abgetheilt; man soll diese 9 Fächer mit solchen ganzen Zahlen ausfüllen, dass die Summe von je drei Zahlen, welche in gerader Linie stehen, 15 ist. Wie heissen diese Zahlen?

Auflösung. Bekanntlich versteht man unter einem Zauberquadrate die Herstellung solcher Zahlen-Gruppen, welche allemal eine feste Summe geben. Da die Bildung der Zauberquadrate Interesse gewährt, so möge hier die vollständige Auflösung folgen.

Man bezeichne die 9 Felder mit den Zahlen:

A	*B*	*C*
D	*E*	*F*
G	*H*	*I*

und deren Summe 15 allgemein mit S; dann erhält man die Gleichungen:

1) $A + B + C = S$
2) $D + E + F = S$
3) $G + H + I = S$
4) $A + D + G = S$
5) $B + E + H = S$
6) $C + F + I = S$
7) $A + E + I = S$
8) $C + E + G = S$

Aus diesen eliminire man systematisch die Unbekannten I, H, G, F, D folgendermassen:

Aus (7) und (6) folgt: $C + F - A - E = 0$ (9)
Aus (5) und (3) folgt: $B + E + G - I = 0$ (10)
Dazu (7) addirt, giebt: $A + B + 2E - G = S$ (11)
Aus (8) und (4) folgt: $A + D - C - E = 0$ (12)
Aus (11) und (8) folgt: $A + B + C + 3E = 2S$ (13)
Davon (1): $A + B + C \qquad = S$

so resultirt: $3E = S$ und mithin

$$E = \frac{S}{3} \quad (14).$$

Hieraus ergiebt sich nun, dass die Zahl im Mittelfelde, nämlich E, allemal der dritte Theil der Summe S sein muss.

Nach (12) ist $A+D-C-\frac{S}{3}=0$. Daraus folgt:

$$D=\frac{S}{3}+C-A.$$

Man kann nun für C und A willkührliche Zahlen annehmen, doch darf A nicht $> C+\frac{S}{3}$ sein.

Wenn daher $A=4$	4	8	. . .
$C=3$	2	6	. . .
$S=15$, also $E=5$	5	5	. . .
$B=S-A-C=8$	9	1	. . .
so ist: $D=\frac{S}{3}+C-A=4$	3	3	. . .
$F=S-D-E=6$	7	7	. . .
$G=S-A-D=7$	8	4	. . .
$H=S-B-E=2$	1	9	. . .
$I=S-C-F=6$	6	2	. . .

Für andere Werthe von S lassen sich nach diesen Formeln alle 9 Zahlen ebenso leicht finden. Die 3 bestimmten Quadrate von der Form 15 sind also:

4	8	3
4	5	6
7	2	6

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Anmerkung. Merkwürdig ist eine mechanische Regel zur Bildung der Zauberquadrate, deren Seiten von ungerader Zahl sind. Dieselbe soll von den Indern abstammen. Nach derselben lassen sich unendlich viele verschiedene Quadrate herstellen, bei welchen die Zahlen in arithmetischer Progression fortschreiten, wie folgendes Schema zeigt:

$a+7d$	a	$a+5d$
$a+2d$	$a+4d$	$a+6d$
$a+3d$	$a+8d$	$a+d$

$S = 3a+12d.$

$a+16d$	$a+23d$	a	$a+7d$	$a+14d$
$a+22d$	$a+4d$	$a+6d$	$a+13d$	$a+15d$
$a+3d$	$a+5d$	$a+12d$	$a+19d$	$a+21d$
$a+9d$	$a+11d$	$a+18d$	$a+20d$	$a+2d$
$a+10d$	$a+17d$	$a+24d$	$a+d$	$a+8d$

Hier ist $S = 5a+60d.$

Anmerkung. An Schriften über Zauberquadrate ist die mathem. Literatur nicht arm. Unter den verschiedenen Schriftstellern erwähnen wir nur: Kircher (Arithmologie), Arnaud (Nouveaux Elémens de Géometrie, 1667), Agrippa von Nettesheim (De occulta philosophia), Bachet de Meziriac (Problemes plaisans 1612 und 1624), Frenicle (Divers ouvrages de Mathematique et de Physique, Paris 1693); Poignard; Rollier des Ourmes; Ozanam; Stifel (Arithmetica integra I. Cap. 3.), Adam Riese (Rechenbuch, 1550), Cornelius Capito (Alle magischen Quadrattafeln zu verfert. und viele 100, 1000, ja millionenmal zu verändern, Glückstadt, 1767), Vieth (Leipz. Magazin), Klügel (Commentatio de quadratis magicis, Halle 1806). Diese akadem. Gelegenheitsschrift übertrifft alle vorhergehenden an Gründlichkeit und Ausführlichkeit. Vieles aus den ältern Schriften ist in Wiegleb's natürl. Magie (fortgesetzt von Rosenthal) übergegangen. de Fibre, Zauber-Quadrate und Würfel (Hamburg 1834).

Man sieht daraus, wie viele Mathematiker und Liebhaber sich mit diesem Gegenstande beschäftigt haben. Für den Situationscalcül bietet die Theorie der magischen Quadrate und Würfel keine geringe Aufgabe.

Nr. 94. Diophant. II. 18. Man finde drei Zahlen von der Beschaffenheit, dass wenn von der Summe der zweiten und $\frac{1}{5}$ der ersten $+6$ subtrahirt wird $\frac{1}{6}$ der zweiten $+7$; ferner von der Summe der dritten und $\frac{1}{6}$ der zweiten $+7$ subtrahirt $\frac{1}{7}$ der dritten $+8$ und endlich von der Summe der ersten und $\frac{1}{7}$ der dritten $+8$, subtrahirt wird $\frac{1}{5}$ der ersten $+6$, alsdann die drei Reste gleich gross seien.

Auflösung. Sind x, y, z diese Zahlen, so hat man:

$$y+\tfrac{1}{5}x+6-(\tfrac{1}{6}y+7)=r=\tfrac{5}{6}y+\tfrac{1}{5}x-1$$
$$z+\tfrac{1}{6}y+7-(\tfrac{1}{7}z+8)=r=\tfrac{6}{7}z+\tfrac{1}{6}y-1$$
$$x+\tfrac{1}{7}z+8-(\tfrac{1}{5}x+6)=r=\tfrac{4}{5}x+\tfrac{1}{7}z+2.$$

Es ist also: $\tfrac{5}{6}y+\tfrac{1}{5}x-1=\tfrac{4}{5}x+\tfrac{1}{7}z+2$, oder

I. $\tfrac{5}{6}y-\tfrac{1}{7}z=3+\tfrac{3}{5}x$ und

$\tfrac{6}{7}z+\tfrac{1}{6}y-1=\tfrac{4}{5}x+\tfrac{1}{7}z+2$ oder

II. $\tfrac{5}{7}z+\tfrac{1}{6}y=\tfrac{4}{5}x+3$.

Eliminirt man aus I. und II. die Grösse y, so findet sich

III. $\frac{26}{7}z=12+\frac{17}{5}x$ oder

$$130z=420+119x.$$

Hieraus erhält man nun:

$$z=119D+49$$
$$x=130D+50$$
$$y=114D+48.$$

Wenn daher $D=0,\ 1,\ 2\ \ldots$

so ist $x=50,\ 180,\ 310\ \ldots$

$y=48,\ 162,\ 276\ \ldots$

$z=49,\ 168,\ 287\ \ldots$

Nr. 95. Ein Weinhändler hat viererlei Weine, das Mass zu 48 Kr., zu 40 Kr., zu 30 Kr. und zu 16 Kr., welche er so mischen will, dass das Mass 36 Kr. koste. Wieviel muss er von jedem nehmen?

Auflösung. Er nehme vom:

48-Kr.-Wein	x	Mass,	so kosten sie	$48x$
40 „	y	„	„	$40y$
30 „	z	„	„	$30z$
16 „	u	„	„	$16u$.

Man erhält demnach folgende Gleichung:

$$48x+40y+30z+16u=36x+36y+36z+36u.$$

Nach gehöriger Reduction ist:

$$12x+4y=6z+20u,\text{ oder}$$
$$6x+2y=3z+10u,\text{ folglich}$$
$$y=\tfrac{3}{2}z+5u-3x.$$

Nimmt man für z eine gerade Zahl, für u und x aber solche Zahlen an, dass $3x$ von $\frac{3}{2}z+5u$ abgezogen, einen positiven Rest giebt, so erhält man jedesmal eine Auflösung in ganzen Zahlen. Sei z. B. $x=2$, $z=2$ und $u=1$, dann ist $y=2$. Für $z=6$, $u=1$ und $x=3$, ist $y=5$ u. s. w.

Nr. 96. Es ist gegeben die geometrische Progression

27 36 48 64.

Was muss von jedem Gliede subtrahirt werden, damit die Reste in arithmetischer Progression stehen?

Auflösung. Man bezeichne die Subtrahenda mit x, y, z, t, so muss $27-x$, $36-y$, $48-z$, $64-t$ eine arithmetische Progression werden. Es ist also:

$$36-y-(27-x)=48-z-(36-y), \text{ oder}$$
$$9-y+x=12-z+y, \text{ d. i.}$$
$$\text{I. } (y-x)+3=z-y. \text{ Ferner muss sein:}$$
$$48-z-36+y=64-t-48+z, \text{ oder}$$
$$12-(z-y)=16-(t-z), \text{ also}$$
$$\text{II. } (z-y)+4=t-z. \text{ Hieraus folgt}$$
$$\text{III. } t=2z+4-y.$$

Man hat daher nur zwei unabhängige Gleichungen und vier Unbekannte. Aus diesen folgt, dass

$y>x$, $z>y$ und $t>z$ sein muss; daher kann man für x, y beliebige Zahlen $y>x$ und $x<27$ annehmen, wodurch dann z und t bestimmt werden.

Setzt man $x=$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 etc. und
$y=$ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 etc., so wird
nach I.: $z=$ 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 etc. und
nach III.: $t=$ 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 etc.

Man hat also: 27 36 48 64 geom. Progr.
1 2 6 14
26 34 42 50 arithm. Progr.

Oder: 27 36 48 64
5 6 10 18
22 30 38 46, und hier ist die Differ. der arithm. Progr. $t-z=8$.

Setzt man $x=$ 1, 2, 3, 4, 5 ... und
$y=$ 3, 4, 5, 6, 7 ... so wird
nach I.: $z=$ 8, 9, 10, 11, 12 ... und
nach III.: $t=$ 17, 18, 19, 20, 21 ... Also

27 36 48 64 geom. Progr.
1 3 8 17
26 33 40 47 arithm. Progr.

Hier ist die Differenz $=z-x=7$.

Nr. 97. Die kleinste und alle übrigen Zahlen zu finden, welche durch 11, 13, 15, 17, 19 dividirt, die resp. Reste

$$0,\ +15,\ -1,\ +3,\ -20 \text{ lassen.}$$

Auflösung. Den Bedingungen der Aufgabe zufolge erhält man folgende Gleichungen:

$$11x = 13y+15 = 15z-1 = 17t+3 = 19u-20.$$

Nun ist $x = \frac{13y+15}{11} = y+1+\frac{2y+4}{11} = y+1+\frac{2(y+2)}{11}$.

Sei $y+2 = 11A$, so ist $y = 11A-2$, also

$x = 11A-1+2A = 13A-1$. Daraus folgt:

$143A-10 = 15z$ und

$z = 9A+\frac{2(4A-5)}{15}$. Sei $4A-5 = 15B$, so ist

$A = 3B+1+\frac{3B+1}{4}$. Sei $3B+1 = 4C$, so ist

$B = C+\frac{C-1}{3}$. Ist $C-1 = 3D$, so folgt $C = 3D+1$,

also $B = 4D+1$ und $A = 15D+5$; daher

$z = 143D+47$.

Es ist ferner: $15z-1 = 2145D+704 = 17t+3$, folglich

$t = 126D+41+\frac{3D+4}{17}$. Sei $3D+4 = 17E$, so ist

$D = 5E-1+\frac{2E-1}{3}$. Man setze $2E-1 = 3F$, so

wird $E = \frac{3F+1}{2} = F+\frac{F+1}{2}$. Sei $F+1 = 2G$, so ist

$F = 2G-1$. Daher hat man $E = 3G-1$ und $D = 17G-7$;

folglich: $t = 126(17G-7)+41+\frac{3(17G-7)+4}{17} = 2145C-842$,

also $17t+3 = 36465G-14311 = 19u-20$. Daraus folgt:

$u = 1919G-752+\frac{4G-3}{19}$. Man setze $4G-3 = 19H$,

so ist $G = 4H+\frac{3(H+1)}{4}$ und, für $H+1 = 4I$, ergiebt sich $H = 4I-1$, sowie $G = 19I-4$. Diesen Werth von G in die vorige Gleichung gesetzt, erhält man:

$u = 1919(19I-4)-752+\frac{4(19I-4)-3}{19}$, oder

$u = 36465I-8429$. Endlich erhält man

$$19u-20 = 692835I-160171.$$

Für $I = 1$ findet man die kleinste gesuchte Zahl $= 532664$; für $I = 2$ erhält man 1225499 u. s. w.

Andere Auflösung durch cyklische Perioden. Man bestimme die Ordnungszahl der Complex.

$$\begin{array}{ccccc} (11) & (13) & (15) & (17) & (19) \\ 0, & +15, & -1, & +3, & -20. \end{array}$$

Dann erhält man

$$\begin{array}{lll} \text{aus } \dfrac{13 \,.\, 15 \,.\, 17 \,.\, 19}{11} = \dfrac{62985}{11} & \text{den Rest} & 10; \\[2ex] \text{„} \quad \dfrac{11 \,.\, 15 \,.\, 17 \,.\, 19}{13} = \dfrac{53295}{13} & \text{„} \quad \text{„} & 8; \\[2ex] \text{„} \quad \dfrac{11 \,.\, 13 \,.\, 17 \,.\, 19}{15} = \dfrac{46189}{15} & \text{„} \quad \text{„} & 4; \\[2ex] \text{„} \quad \dfrac{11 \,.\, 13 \,.\, 15 \,.\, 19}{17} = \dfrac{40755}{17} & \text{„} \quad \text{„} & 6; \\[2ex] \text{„} \quad \dfrac{11 \,.\, 13 \,.\, 15 \,.\, 17}{19} = \dfrac{36465}{19} & \text{„} \quad \text{„} & 4. \end{array}$$

Nach §. 169 erhält man sofort:

$$\begin{array}{rrl} \dfrac{11A + 0}{10} \,.\, 62985 = & 0 & \text{für } A = 0 \\[2ex] \dfrac{13B + 15}{8} \,.\, 53295 = & 532950 & \text{„} \quad B = 5 \\[2ex] \dfrac{15C - 1}{4} \,.\, 46189 = & 508079 & \text{„} \quad C = 3 \\[2ex] \dfrac{17D + 3}{6} \,.\, 40755 = & 366795 & \text{„} \quad D = 3 \\[2ex] \dfrac{19E - 20}{4} \,.\, 36465 = & -182325 & \text{„} \quad E = 0 \\ \hline \text{Ordn.-Zahl} = & 1225499. & \end{array}$$

Dividirt man dieselbe durch das Product aller Reihenzahlen, nämlich $11 \,.\, 13 \,.\, 15 \,.\, 17 \,.\, 19 = 692835$, so erhält man zum Reste 532664, die gesuchte kleinste Zahl, wie vorhin.

Nr. 98. Es sind drei Kaufleute A, B, C; A hat 27 Ellen Tuch, B 34, C 41 und verkauft keiner die Elle theurer als der andere. Nachdem sie ihr sämmtliches Tuch verkauft, hat keiner mehr Geld gelöst, als der andere. Es entsteht nun die Frage, wie dieses zugegangen ist?

Auflösung. Offenbar wird die Aufgabe nur dadurch möglich, wenn man annimmt, dass die Kaufleute ihr Tuch an mehre-

ren Tagen zu gleichen Preisen verkauft haben, der eine mehr, der andere weniger Ellen.

Es habe nun verkauft:

am 1sten Tage:	am 2ten Tage:
A x Ellen à m ₰	$27-x$ Ellen à n ₰
B y „ à m „	$34-y$ „ à n „
C z „ à m „	$41-z$ „ à n „

Der Erlös von A ist also $= mx+27n-nx$

„ „ „ B „ „ $= my+34n-ny$

„ „ „ C „ „ $= mz+41n-nz$.

Nach der Bedingung erhält man folgende Gleichungen:

I. $mx+27n-nx = my+34n-ny$, oder

$$(m-n)x = (m-n)y+7n$$

II. $my+34n-ny = mz+41n-nz$, oder

$$(m-n)y = (m-n)z+7n.$$

Aus I. folgt: $x = \frac{(m-n)y+7n}{m-n} = y + \frac{7n}{m-n}$

„ II. „ $y = \frac{(m-n)z+7n}{m-n} = z + \frac{7n}{m-n}$.

Die unbestimmten Zahlen m und n können beliebig angenommen werden; sollen jedoch x, y, z nur ganze Zahlen sein, so müssen m und n solche Werthe erhalten, dass $m-n$ in $7n$ aufgeht.

Setzt man $m=2$ und $n=1$, so wird $\frac{7n}{m-n} = \frac{7}{2-1} = 7$; daher $x=y+7$ und $y=z+7$, also $x=z+14$ und aus dem Werthe von z bestimmen sich dann die von y und x.

Wenn also $z = 1, 2, 3 \ldots\ldots$ | 13, so ist
$x = 15, 16, 17 \ldots\ldots$ | 27 und
$y = 8, 9, 10 \ldots\ldots$ | 20.

Der Werth von $z=13$ muss jedoch ausgenommen werden, weil sonst $x=27$ ist, so dass A am ersten Tage alles und am zweiten nichts mehr verkauft haben würde.

Probe.

A verkaufte	1. Tag	15 Ell.	à 2 ₰	=	30 ₰
	2. Tag	12 „	à 1 „	=	12 „
		27 „			42 ₰
B „	1. Tag	8 „	à 2 „	=	16 „
	2. Tag	26 „	à 1 „	=	26 „
		34 „			42 ₰

C verkaufte	1. Tag	1 Ell.	à 2 Sgr.	=	2 Sgr.
	2. Tag	40 „	à 1 „	=	42 „
		41 „		:	42 Sgr.

Nr. 99. An Lastwagen werden 3 Pferde oft so vertheilt angespannt, dass an das Ende der Wage, rechts von deren Drehpunkt, eine kleinere Wage angebracht wird, an welcher 2 Pferde ziehen, während links nur ein Pferd wirkt. Auch sieht man zuweilen, dass die 3 Pferde unmittelbar an die grosse Wage angehängt werden. Wie ist hier die Vertheilung zu treffen? Das allein stehende linke Pferd heisse *A*, die beiden anderen Pferde aber mögen *B* und *C* heissen, die Entfernung des Hypomochlions von *A* sei z, die von *B* aber x, die von *C* y und die Länge der Wage a. Welcher Werth ergiebt sich für z, x, y?

Auflösung. Die Physik lehrt, dass wenn beim Hebel Gleichgewicht bestehen soll, die statischen Momente gleich sein müssen, d. h. dass das Product aus der Last oder Kraft und dem Hebelarme, woran sie wirkt, auf beiden Seiten des Drehpunctes gleich sein müsse. Hier wirken aber auf der einen Seite 2 Kräfte; daher muss die Summe der beiden stat. Momente ebenso gross sein, als das auf der anderen Seite.

Da die Pferdekräfte hier gleich gross vorausgesetzt werden, so kann man jede $= 1$ setzen und man erhält demnach die Gleichungen:

$$\text{I.} \quad 1 . z = 1 . x + 1 . y$$
$$\text{II.} \quad y + z = a.$$

Es ist daher $z = a - y$ und $0 = x + 2y - a$, oder $a - x = 2y$. Die gesuchten Werthe sind hiernach: $y = \frac{a-x}{2}$ und $z = a - \frac{a-x}{2} = \frac{a+x}{2}$.

Welche Werthe ergeben sich für $a = 5$ Fuss, für z und y, bei willkührlicher Wahl des x?

Antw.: $x = 0,\ z = \frac{5}{2} = y;$
$x = 1,\ z = 3,\ y = 2;$
$x = 2,\ z = \frac{7}{2},\ y = \frac{3}{2};$
$x = 3,\ z = 4,\ y = 1.$

Nr. 100. An einem zweiarmigen mathematischen Hebel halten zwei Gewichte auf der einen Seite des Drehpunktes einem Gewichte auf der anderen Seite das Gleichgewicht. Wenn nun die Länge des Hebels $= a$ ist, wie gross sind dann die Hebelarme für

die Gewichte a, b, c, von denen die letzteren beiden auf der einen Seite zusammen wirken?

Auflösung.

Das Gewicht a ziehe an dem Arme z und
" " b " " " " x
" " c " " " " y.

Dann erhält man, da die Momente gleich sein müssen, folgende Gleichungen:

$$\text{I.}\quad az = bx + cy \text{ und}$$
$$\text{II.}\quad z + y = a.$$

Daraus folgt: $cz + cy = ac$,

und $(a+c)z = bx + a$, also $z = \frac{bx+ac}{a+c}$, folglich.

$y = a - \frac{bx+ac}{a+c} = \frac{a^2 - bx}{a+c}$, wobei dann x willkührlich angenommen werden kann.

Vermischte Aufgaben, theils mit, theils ohne Auflösungen.

Nr. 1. Gieb 6 Zahlen einer arithmetischen Progression an, deren Summe 42 beträgt. Welche Zahlen sind es?

Auflösung. Man setze:

$x + (x+y) + (x+2y) + (x+3y) + (x+4y) + (x+5y)$, oder

$$6x + 15y = 42, \text{ d. i.}$$
$$3x + 5y = 14.$$

Hieraus folgt: $x = 3 - 5A$ und $y = 3A + 1$.

Für $A = 0$ ist $x = 3$ und $y = 1$; andere Werthe können nur Brüche oder negative Zahlen sein.

Nr. 2. In Heis Exempelbuche (5te Aufl. Köln 1850) S. 268. Nr. 13. befindet sich folgende Aufgabe:

Wenn in der Gleichung $7x + 3 = y$ statt x nach und nach die, eine arithmetische Progression bildenden Werthe 3, 5, 7, 9 u. s. w. gesetzt werden, so bilden auch die hieraus sich ergebenden Werthe von y eine arithmetische Reihe. Warum?

Auflösung. Aus der Theorie ist bekannt, dass die Werthe von x und y, welche der Gleichung $7x - y = 3$ genügen, in Reihen fortschreiten, deren Differenzen oder Exponenten beziehlich

$=1$ und 7 sind. Da nun die 3ten, 5ten, 7ten etc. Glieder beider Reihen als homologe Glieder ebenfalls gleiche Differenzen haben müssen, so liegt hierin der Grund der Frage.

Nr. 3. Man soll zwei Zahlen der Art finden, dass wenn die eine mit 5, die andere mit 12 multiplicirt wird, ebensoviel herauskömmt, als wenn man die Summe beider Zahlen mit 8 multiplicirt.

Auflösung. Sind x, y die gesuchten Zahlen, so hat man:

$$5x+12y = 8(x+y), \text{ oder}$$
$$5x+12y = 8x+8y$$
$$\text{d. i. } 4y = 3x$$

Daher ist: $x = 4A$ und $y = 3A$.

Nr. 4. Man hat 2 steigende arithmetische Progressionen von der Beschaffenheit, dass

das 4te Glied der ersten = dem 3ten Gliede der zweiten,
„ 9te „ „ „ = „ 6ten „ „ „

Man soll daraus diese Progressionen bestimmen.

Auflösung.

Das Anfangsglied der I. Progr. sei $=x$, ihr Expon. $=z$,
„ „ „ II. „ „ $=y$, „ „ $=t$; so ist

$$1)\quad x+3z = y+2t$$
$$2)\quad x+8z = y+5t, \text{ folglich}$$
$$3)\quad 5z = 3t.$$

Es ist also: $z = 3A$ und $t = 5A$.

Wenn daher $A = 1, 2, 3 \ldots$
so ist $z = 3, 6, 9 \ldots$
und $t = 5, 10, 15 \ldots$

Für $z = 3$ und $t = 5$ erhält man aus 1) und 2):

$$x+9 = y+10 \text{ oder}$$
$$x = y+1.$$

Wenn also $y = 1, 2, 3 \ldots$
so folgt: $x = 2, 3, 4 \ldots$ und die Progr. sind:

I. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 ...
II: 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31 ...

u. s. w.

Nr. 5. Es sind zwei ganze Zahlen a und b gegeben; man soll zwei andere finden von der Beschaffenheit, dass, wenn man durch dieselben die erste von den gegebenen multiplicirt und die dadurch entstandenen Producte durch die andere gegebene Zahl

dividirt, auf beiden Seiten gleich viel übrig bleibt (Tempelhoff's Analysis p. 521.)

Auflösung. Es seien x und y die gesuchten Zahlen.

Es gebe $ax : b$ den Quot. p und den Rest r

„ „ $ay : b$ „ „ q „ „ „ r;

ferner sei $x > y$, so ist hiernach:

$$ax = bp + r \text{ und}$$
$$ay = bq + r, \text{ folglich}$$

$$ax - ay = bp - bq, \text{ oder}$$
$$a(x - y) = b(p - q).$$

Daher ist $x - y = \frac{b(p-q)}{a}$.

Sind nun die Zahlen a, b, p, q gegeben, oder nimmt man sie beliebig an, so ergeben sich für x und y unendlich viele Werthe, welche der Aufgabe Genüge leisten.

Ist z. B. $a = 3$, $b = 7$, $p = 8$, $q = 2$, so erhält man $x - y = 14$. Setzt man also $x = 19$, so wird $y = 5$ und es ist $\frac{ax}{b} = \frac{3.19}{7} = \frac{57}{7} = 8 + \frac{1}{7}$; $\frac{ay}{b} = \frac{3.5}{7} = 2 + \frac{1}{7}$. Es bleibt daher in beiden Fällen derselbe Rest $= 1$.

Nr. 6. Ein glücklicher Spieler zählte seine gewonnenen Ducaten zweimal hintereinander, das erste Mal nach Würfen von drei Stücken, wo ihm 2 übrig blieben, das zweite Mal nach Würfen von fünf Stücken, wo ihm einer übrig blieb. Er setzte sich hierauf von neuem zum Spiele, verlor sechs Ducaten und zählte hierauf die übrigen nach 7 und 11, da blieben ihm jedes Mal 3 übrig. Wieviele Ducaten hatte er im ersten Spiele gewonnen?

Auflösung. Sei die gesuchte Zahl $= N$, so hat sie die Form $3x+2$, sowie auch $5y+1$ und es ist zunächst:

$$N = 3x + 2 = 5y + 1.$$

Löst man diese Gleichung auf, so findet sich:

$$x = 5B - 2; \; y = 3B - 1.$$

Es ist also $N = 15B - 4$. Nach dem 2ten Spiele hat der Spieler $N - 6$ Ducaten, folglich ist $N - 6 = 7z + 3$, oder $N = 7z + 9$, d. i. $15B - 4 = 7z + 9$. Daraus folgt:

$$7z = 15B - 13 \text{ und } z = 15C + 11.$$

Ferner ist: $N = 105C + 86 = 11t + 9$ oder

$11t = 105C + 77$, woraus sich ergiebt
$t = 105D + 7$.

Demnach ist $N = 1155D + 86$.

Nimmt man also $D = 0, \quad 1$ etc.
so ist $N = 86, \; 1241$ etc.

Nr. 7. Man verlangt 3 Zahlen dergestalt, dass $\frac{1}{2}$ aus A gleich soviel als $\frac{2}{3}$ aus B und $\frac{3}{4}$ aus C sei!

Auflösung. Die gesuchten Zahlen seien $A = x$, $B = y$, $C = z$; dann ist: $\quad \frac{1}{2}x = \frac{2}{3}y = \frac{3}{4}z$.

Da $\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}y$, so ist $3x = 4y$, also $\begin{cases} x = 4m \\ y = 3m \end{cases}$.

Da ferner $\frac{2}{3}y = \frac{3}{4}z$, so ist $8y = 9z$, also $\begin{cases} y = 9n \\ z = 8n \end{cases}$.

Es ist also: $x = 12p$
$y = 9p$
$z = 8p$.

Für $p = 1, \; 2, \; 3, \; 4$
ist $x = 12, \; 24, \; 36, \; 48$
$y = 9, \; 18, \; 27, \; 36$ u. s. w.
$z = 8, \; 16, \; 24, \; 32$

Nr. 8. Suchet 3 Zahlen (und zwar die kleinsten), so dass $\frac{1}{2}$ aus A ebensoviel als $\frac{2}{3}$ aus B und $\frac{3}{4}$ aus B ebensoviel als $\frac{4}{5}$ aus C beträgt!

Auflösung. Diese Zahlen seien x, y, z, dann ist

1) $\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}y$, oder $3x = 4y$,
folglich $x = 4m$ sowie $y = 3m$ (2).
Nun ist $\frac{3}{4}y = \frac{4}{5}z$ oder $15y = 16z$ (3).

Setzt man den Werth von y aus (2) in (3), so folgt:

4) $45m = 16z$.

Es ist also $m = 16p$ und $z = 45p$, mithin findet sich
$x = 64p$ und $y = 48p$.

Setzt man $p = 1$, so erhält man die kleinsten Zahlen, nämlich
$A = 64$, $B = 48$ und $C = 45$
u. s. w.

Nr. 9. Die Fälle anzugeben, wo die Formel $\frac{19x - 23}{28}$ eine ganze Zahl wird.

Auflösung. Es sei $\frac{19x - 23}{28} = y$, so ist $19x - 23 = 28y$.

Hieraus ergiebt sich: $x = 28A + 13$.

Für $A = 0$ ist $x = 13$ und die Formel $\frac{19x - 23}{28}$ wird $= 8$. Für $A = 1$ folgt $x = 41$ und der Werth von $y = 7$ u. s. w.

Nr. 10. Es sollen 3 Zahlen x, y, z von der Beschaffenheit gefunden werden, dass, wenn man die erste mit 7, die zweite mit 9 und die dritte mit 11 multiplicirt, das erste Product um 1 kleiner als das zweite und um 3 grösser als das dritte sei.

Auflösung. Man erhält hier folgende Gleichungen:

1) $7x + 1 = 9y$

2) $7x - 3 = 11z$. Subtrahirt man die 2te von der 1sten, so kommt: 3) $4 = 9y - 11z$. Daraus findet sich

$$y = \frac{11z + 4}{9} = z + \frac{2(z+2)}{9}.$$ Sei $z + 2 = 9A$, so ist $z = 9A - 2$ und $y = 11A - 2$.

Ferner ist: $7x + 1 = 9y = 99A - 18$, daher

$$x = \frac{99A - 19}{7} = 14A - 2 + \frac{A - 5}{7}.$$

Sei $A - 5 = 7B$, dann ist $A = 7B + 5$, folglich $x = 99B + 68$; $y = 77B + 53$; $z = 63B + 43$.

Wenn daher $B = 0, \ 1 \ldots$ so ist

$x = 68, \ 167 \ldots$

$y = 53, \ 130 \ldots$

$z = 43, \ 106 \ldots$

Nr. 11. Eine Partie eiserne Kugeln sollen verladen werden, und es bleiben 40 Stück übrig, wenn man auf jede Fuhr 80 Stück rechnet; werden aber 87 auf jede Fuhr geladen, so bleiben 42 Kugeln übrig. Wie gross ist die Anzahl der zu verladenden Kugeln wenigstens?

Auflösung. Die Anzahl der Kugeln kann sowohl durch $80x + 40$, als auch durch $87y + 42$ ausgedrückt werden. Es ist also $80x + 40 = 87y + 42$. Hieraus ergiebt sich $y = 80C - 46$ und die Anzahl der Kugeln ist $= 6960C - 3960$, woraus für $C = 1$ die kleinste Anzahl 3000 folgt.

Nr. 12. Es sind von einer 3-, 4-, 5-, 6-, 7- etc. seitigen Figur ringsherum gehend immer zwei anstossende oder benachbarte Seiten zusammen gegeben; man soll diese Seiten selbst finden und nachweisen, wie es zugehe, dass die Aufgabe allemal bestimmt

sei, sobald die Anzahl der Seiten der Figur **ungerade** ist, dass sie dagegen **unbestimmt** sei, wenn die Seitenzahl **gerade** ist.

Auflösung. 1) Die Figur habe 3 Seiten x, y, z und es sei

$$x+y=a$$
$$y+z=b$$
$$z+x=c.$$

Diese 3 Gleichungen sind aber unabhängig; die Hälfte ihrer Summe ist:

$$x+y+z=\frac{a+b+c}{2},$$

so dass nun jede der gegebenen Gleichungen davon abgezogen werden kann, um die dritte fehlende zu erhalten. Hier ist also die Aufgabe völlig bestimmt.

2) Sind die Seiten eines Fünfecks nach der Reihe v, w, x, y, z und sind diese paarweise gegeben:

$$v+w=a$$
$$w+x=b$$
$$x+y=c$$
$$y+z=d$$
$$z+v=e,$$

so ist wieder die halbe Summe dieser Gleichungen: $v+w+x+y+z=\frac{1}{2}(a+b+c+d+e)$, so dass jetzt die Summe von je 2 der gegebenen Gleichungen hiervon abgezogen werden kann, wodurch die fünfte fehlende oder übrig bleibende gefunden wird. Die Aufgabe ist daher bestimmt.

Dasselbe gilt offenbar von 7, 9, 11 u. s. w. Unbekannten, wenn von ihnen die Summe je zweier gegeben sind.

3) Wenn aber bei einem Vierecke, dessen Seiten w, x, y, z sind, die Gleichungen vorliegen:

$$1)\quad w+x=a$$
$$2)\quad x+y=b$$
$$3)\quad y+z=c$$
$$4)\quad z+w=d,$$

so ist der vorige Weg der Auflösung nicht mehr zulässig; denn diese Gleichungen sind nicht mehr **unabhängige**. Man kann jede einzelne von ihnen wegfallen lassen, sie ist aus den 3 übrigen herzustellen. Es werde z. B. die 1ste gestrichen; dann giebt (2) zu (4) addirt:

$$x+y+z+w=b+d, \text{ davon (3) abgezogen}$$
$$y+z \qquad = c$$

giebt: $x+w \qquad = b+d-c$, welches wieder die erste Gleichung ist, weil $b+d-c=a$.

Dasselbe lässt sich von 6, 8, 10 u. s. w. Unbekannten, deren Summen paarweise gegeben sind, beweisen, und jedesmal erscheint die Aufgabe in solchem Falle unbestimmt.

Wie man aber diese Gleichungen aufzulösen habe, ist im Cap. 3. und 4. erklärt.

Nr. 13. Aus der Auflösung einer unbestimmten Aufgabe mit 3 Unbekannten ergab sich: $x = 99B + 68$, $y = 77B + 53$, $z = 63B + 43$. Ein Schriftsteller giebt aber diese Werthe folgendermassen an: $x = 99C - 31$; $y = 77C - 24$ und $z = 63C - 20$. Man soll diese aus jenen herleiten.

Nr. 14. Ein Obrist wurde gefragt, wie stark sein Regiment sei? Er antwortete: Mein Regiment, das jetzt keine 2000 Mann stark ist, kann ich zwar zu je 5, 6 und 7 Mann hoch stellen, ohne dass mir einer übrig bleibt; wollte ich es aber 11 und 13 Mann hoch stellen, so würde ich im ersten Falle 9 Mann zu viel, im zweiten 8 Mann zu wenig haben.

Nr. 15. Hundert Gulden in Louisd'or zu 9 Fl. 36 Kr. und Ducaten zu 5 Fl. 24 Kr. ohne alles Silbergeld zu bezahlen.

Nr. 16. Hundert Thaler oder 150 Fl. in Louisd'or und Ducaten nach demselben Course wie vorher ohne alles Silbergeld zu bezahlen.

Nr. 17. Die Zahl 15 so in drei Theile zu theilen, dass, wenn der erste Theil mit 9, der zweite mit 7, der dritte mit 5 multiplicirt wird, diese drei Producte zusammen = 99 sind.

Nr. 18. Eine Gesellschaft von 20 Personen, Männer, Frauen, Knaben und Mädchen, hat zusammen 8 Thlr. 8 Ggr. oder 200 Ggr. bezahlt, und zwar jede Frau $\frac{2}{3}$, jeder Knabe $\frac{1}{2}$ und jedes Mädchen $\frac{1}{3}$ von dem, was 1 Mann bezahlte, nämlich 12 Ggr., jede Frau 8 Ggr., jeder Knabe 6 Ggr. und jedes Mädchen 4 Ggr. Wieviel Männer, Frauen, Knaben und Mädchen waren unter der Gesellschaft?

Nr. 19. Von zwei in einander greifenden Rädern greift der erste Zahn des ersten Rades gegenwärtig in die neunte Zahnlücke des zweiten Rades; im Beginne der Bewegung griff der erste Zahn des ersten Rades in die erste Zahnlücke des zweiten. Wieviel Umläufe hat jedes der beiden Räder gemacht, wenn das erste 21, das zweite 31 Zähne hat?

Nr. 20. Wenn von zwei in einander greifenden Rädern das eine 12 und das andere 29 Zähne hat, wird dann jeder Zahn des

einen Rades allmählig in jede Zahnlücke des andern fassen? — Wie wird die Antwort heissen, wenn das eine Rad 12, das andere 30 Zähne hat?

Nr. 21. In Ozanam Recréations mathematiques werden zur Berechnung eines Zauberquadrates, dessen Seite aus 3 Abtheilungen besteht, folgende allgemeinen Formeln für jedes der 9 Felder angegeben:

$$\begin{matrix} 3b-2a, & 8b-7a, & b \\ 2b-a, & 4b-3a, & 6b-5a \\ 7b-6a, & a, & 5b-4a \end{matrix}$$

wo jeder Reihe Summe $= 12b - 9a$ ist. Man soll nachweisen, woher diese Formeln kommen.

Nr. 22. Jemand erklärt, dass eine Aufgabe, welche zu den drei Gleichungen führt:

$$\begin{aligned} 1)\quad & 6x - 4y + 7z = 37 \\ 2)\quad & 7x - 13y + 4z = -11 \\ 3)\quad & -8x + 18y - 3z = 33, \end{aligned}$$

unbestimmt sei. Ist das richtig?

Nr. 23. Ozanam giebt zur Bildung eines Zauberquadrates von 4 Feldern auf jeder Seite, folgende Formeln:

$$\begin{matrix} a, & 14b-13a, & 13b-12a, & 3b-2a \\ 11b-10a, & 5b-4a, & 6b-5a, & 8b-7a \\ 7b-6a, & 9b-8a, & 10b-9a, & 4b-3a \\ 12b-11a, & 2b-a, & b, & 15b-14a. \end{matrix}$$

Es wird gefragt, wie diese Formeln gefunden werden?

Nr. 24. Gesucht werden vier ganze Zahlen von der Beschaffenheit, dass wenn man je zwei derselben addirt, sechs Zahlen entstehen in arithmetischer Progression, deren Summe $= 1716$ ist. Wieviele verschiedene Auflösungen sind hier möglich?

Nr. 25. Eine Wildhändlerin hat 10 Rebhühner auf dem Markte verkauft, eine zweite 25 und eine dritte 30; alle drei verkaufen gleichzeitig zu demselben Preise. — Als die Frauen zuletzt vom Markte weggehen, findet es sich, dass alle drei gleich viel Geld bei ihrem Verkaufe eingenommen haben. Es ist die Frage, zu welchem Preise und in welcher Art die Wildhändlerinnen ihren Verkauf bewerkstelligten?

Zusätze.

Zu §. 156. S. 119. ist hinzuzufügen:

§. 156 a. **Lehrsatz.** Ein Bruch $\frac{a}{b}$ lässt sich nur dann genau in einen Systembruch verwandeln, wenn sein Nenner in der Basis oder einer Potenz derselben aufgeht.

Beweis. Der Bruch $\frac{a}{b}$ kann dem Systembruche $\frac{x}{\alpha^n}$ gleich gesetzt werden; dann ist $x = \frac{a \,.\, \alpha^n}{b}$. Da nun b in α aufgeht, so ist auch b ein Faktor von α^n und geht daher auch b in $a \,.\, \alpha^n$ auf.

§. 156 b. **Lehrsatz.** Ein rein periodischer Systembruch wird auf einen gemeinen Bruch reducirt, wenn man die Ziffern der Periode zum Zähler ansetzt, zum Nenner aber die sovielte Potenz der Basis nimmt, als die Periode Ziffern hat und davon 1 abzieht.

Beweis. Man kann jeden periodischen Systembruch ebenso, wie bei Decimalbrüchen schreiben, z. B. 0, $abc\,abc\ldots.$ Nun sei der Bruch 0, $ab \ldots rab \ldots r \ldots$ gegeben, wo die Periode n Ziffern habe, dann setze man:

1) $x = 0, ab \ldots r\, ab \ldots r \ldots$ folglich, wenn man mit α^n mult.: 2) $\alpha^n x = ab \ldots r,\ ab \ldots r\, ba \ldots r \ldots.$ Zieht man (1) von (2) ab, so folgt:

3) $(\alpha^n - 1)x = ab \ldots. r.$ Bezeichnet man die $n$ziffrige Periode mit p, so erhält man $x = \frac{p}{\alpha^n - 1}$.

Zusatz. Ist der gegebene Systembruch ein gemischt periodischer und gehen vor der $n$ziffrigen Periode m Ziffern (nach dem Komma) her und nennt man die $m$ziffrige Zahl q, die $m+n$ziffrige p, so findet man auf ähnliche Weise: $x = \frac{p - q}{\alpha^m(\alpha^n - 1)}$. Hierzu wird man sich leicht einige Beispiele mit Decimal- oder Duodecimalbrüchen bilden können.

§. 156 c. **Lehrsatz.** Wenn ein Bruch $\frac{a}{b}$ in einen Systembruch verwandelt werden soll und es hat der Nenner mit der Basis einen gemeinschaftlichen Factor, ausserdem aber auch einen Primfactor, welchen die Basis nicht besitzt, so erscheint der Systembruch g e m i s c h t p e r i o d i s c h.

Beweis. Ist a prim zu b, so kann $\frac{a}{b}$ keinen geschlossenen Systembruch geben; wollte man nun annehmen, die Verwandlung brächte einen rein periodischen Bruch zuwege, so würde $\frac{a}{b} = \frac{p}{\alpha^n - 1}$, folglich $p = \frac{a(\alpha^n - 1)}{b}$ sein. Dann müsste, da b prim zu a, nothwendig b in dem andern Factor $\alpha^n - 1$ aufgehen, welches nur angeht, wenn b prim zu α ist.

§. 156 d. **Lehrsatz.** Wenn der Nenner b eines Bruches $\frac{a}{b}$ prim zur Basis α ist, so entsteht bei seiner Verwandlung jederzeit ein rein periodischer Systembruch und es ist der Rest, den man beim Schlusse jeder Periode erhält, dem Zähler a des gegebenen Bruches gleich.

Beweis. Denn gesetzt, der Bruch $\frac{a}{b}$, dessen Glieder relativ prim sind, gebe einen gemischt-periodischen Bruch, den wir durch $\frac{p - q}{\alpha^m(\alpha^n - 1)}$ bezeichnen können, so würde $a = \frac{b(p - q)}{\alpha^m(\alpha^n - 1)}$ sein. Es müsste also, da α prim zu b ist, $p - q$ durch α^m theilbar sein und daher $p - q$ mit m Nullen schliessen. Dies findet jedoch nicht immer statt; ist es aber der Fall, so erhält man nach geschehenem Aufheben der Nullen, $\frac{p - q}{\alpha^m} = Q$ gesetzt, $a = \frac{b \cdot Q}{\alpha^n - 1}$, also $\frac{a}{b} = \frac{Q}{\alpha^n - 1}$, welche Form einen rein periodischen Bruch bezeichnet. Es müssen daher auch die Reste, welche bei der Division bleiben, in ununterbrochener Folge wiederkehren.

